



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.









# Nachrichten

von der

Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1871.



Göttingen.  
Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.  
1871.

A 10x10 grid of dots forming a stylized drawing of a person sitting on a chair, with a small table to the right.



# Weitere Bemerkungen über asymptotische Linien.

Von

**A. Enneper.**

In den Nachrichten v. d. K. G. d. W. vom Jahre 1870 findet sich auf Seite 501 ein System von Gleichungen, durch welches die windschiefen Flächen bestimmt sind, für welche die asymptotischen Linien eines Systems die Eigenschaft haben, dass die Distanz zweier Curven, gemessen in der Richtung der Generatricen, constant ist. Die Reduction dieses Systems von Gleichungen auf die einfachste Form scheint äusserst complicirt zu sein, so dass es nicht ohne Interesse ist, eine andere Behandlung zu geben, welche die Integration verwickelter Differentialgleichungen nicht erfordert. Man bezeichne wieder durch:

$$\alpha, \beta, \gamma;$$

$$\lambda, \mu, \nu;$$

$$l, m, n;$$

die Winkel, welche die Tangente, der Krümmungsradius und die Normale zur Krümmungsebene im Punkte  $(\xi, \eta, \zeta)$  einer Raumcurve mit den Coordinatenachsen bilden, sei ferner  $\rho$  der Krümmungshalbmesser,  $r$  der Torsionsradius im bemerkten Punkte und  $ds$  das Bogenelement. Die Winkel:

$$X, Y, Z;$$

$$X_1, Y_1, Z_1;$$

$$X_2, Y_2, Z_2;$$

gehören zu drei gegenseitig orthogonalen Richtungen im Raume, wenn man setzt:

$$\cos X = \cos \alpha \cos \theta + \cos \lambda \sin \theta \cos \varphi + \cos l \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\cos X_1 = \cos \alpha \sin \theta - \cos \lambda \cos \theta \cos \varphi - \cos l \cos \theta \sin \varphi,$$

$$\cos X_2 = \cos \lambda \sin \varphi - \cos l \cos \varphi.$$

Durch Vertauschung von  $\alpha, \lambda, l$  mit  $\beta, \mu, m$  und  $\gamma, \nu, n$  ergeben sich die entsprechenden Werthe von  $\cos Y, \cos Y_1, \cos Y_2$  und  $\cos Z, \cos Z_1, \cos Z_2$ . Nach den obigen Gleichungen ist:

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos \alpha = \cos X \cos \theta + \cos X_1 \sin \theta.$$

Setzt man:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\cos \varphi}{\varrho} \\ p = \frac{\sin \varphi}{\varrho} \cos \theta + \left( \frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{ds} \right) \sin \theta, \\ p_1 = \frac{\sin \varphi}{\varrho} \sin \theta + \left( \frac{1}{r} - \frac{d\varphi}{ds} \right) \cos \theta, \end{array} \right.$$

so ist:

$$\frac{d \cos X}{ds} = -q \cos X_1 + p \cos X_2,$$



$$\frac{d \cos X_1}{ds} = q \cos X + p_1 \cos X_2,$$

$$\frac{d \cos X_2}{ds} = -p \cos X - p_1 \cos X_1.$$

Analoge Gleichungen finden für  $\cos Y$ ,  $\cos Z$  etc. statt. Für den Punkt  $(x, y, z)$  einer windschiefen Fläche hat man die Gleichungen:

$$x = \xi + v \cos X,$$

$$y = \eta + v \cos Y,$$

$$z = \zeta + v \cos Z.$$

Bekanntlich wird ein System asymptotischer Linien von den Generatricen gebildet, sollen die Curven des andern Systems aequidistant sein, so muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}$$

verschwinden. Multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} \cos X & \cos Y & \cos Z \\ \cos X_1 & \cos Y_1 & \cos Z_1 \\ \cos X_2 & \cos Y_2 & \cos Z_2 \end{vmatrix}$$

so ist das Product gleich:

$$\begin{aligned}
 & - [p_1 (p^2 + q^2) + p \frac{dq}{ds} - q \frac{dp}{ds}] v^2 \\
 & + [p \frac{d \sin \theta}{ds} - \sin \theta \frac{dp}{ds} + 2p_1 q \cos \theta] v \\
 & - (p \cos \theta + p_1 \sin \theta) \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Soll dieser Ausdruck verschwinden, so muss dieses mit den Factoren von  $v^2$ ,  $v$  und dem von  $v$  unabhängigen Term der Fall sein. Schliesst man die Annahme  $\sin \theta = 0$  aus, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} p_1 (p^2 + q^2) + p \frac{dq}{ds} - q \frac{dp}{ds} = 0, \\ \frac{d}{ds} \frac{\sin \theta}{p} + 2p_1 \frac{q \sin \theta}{p^2} = 0, \\ p \cos \theta + p_1 \sin \theta = 0. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen 1) geht die letzte der vorstehenden Gleichungen über in:

$$3) \quad \frac{\sin \varphi}{e} = 0.$$

Setzt man in 2)  $q = p \tan w$ , so folgt:

$$p_1 + \frac{dw}{ds} = 0, \quad \frac{d \log \frac{\sin \theta}{p}}{ds} + 2p_1 \tan w = 0.$$



# Nachrichten

von der

Gesellschaft der Wissenschaften

und der

**Georg - Augusts - Universität**

aus dem Jahre 1871.



Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.  
1871.

Eliminirt man  $p_1$  zwischen diesen Gleichungen und integrirt, so ist:

$$\frac{\sin \theta}{p} \cos^2 w = a,$$

wo  $a$  eine Constante bedeutet. Nimmt man nach 3) zuerst  $\varphi = 0$ , so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$4) \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\sin \theta}{r}, \quad p_1 = -\frac{\cos \theta}{r}, \quad q = p \tan w, \\ r \cos^2 w = \frac{\sin \theta}{p} \cos^2 w = a, \quad \frac{dw}{ds} = \frac{\cos \theta}{r}, \\ \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{\rho} = \frac{\sin \theta}{r} \tan w. \end{array} \right.$$

Mittelst dieser Gleichungen findet man:

$$5) \frac{r \cos w}{\sin \theta} \frac{d \cos X}{ds} = -\sin w \cos X_1 + \cos w \cos X_2$$

$$6) \frac{d}{ds} \left( \frac{r \cos w}{\sin \theta} \frac{d \cos X}{ds} \right) + \frac{\sin \theta}{r \cos w} \cos X = 0.$$

Die Gleichung 6), welche auch für  $\cos Y$  und  $\cos Z$  besteht zeigt, dass man eine Relation von der Form:

$$\cos X_0 \cos X + \cos Y_0 \cos Y + \cos Z_0 \cos Z = 0$$

hat, wo  $X_0, Y_0, Z_0$  Constanten sind. Die Generatrix ist also einer festen Ebene parallel.

Nimmt man dieselbe zur  $xy$ -Ebene, so ist  $\cos Z = 0$ . Aus 6) folgt:

$$\left( \frac{r \cos w}{\sin \theta} \frac{d \cos X}{ds} \right)^2 + \cos^2 X = k^2;$$

wo  $k$  eine Constante bedeutet. Für:

$$7) \cos X = k \cos u, \cos Y = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 u}$$

folgt:

$$8) \frac{r \cos w}{\sin \theta} \frac{du}{ds} = 1.$$

Die Gleichung 5) wird nach 7) und 8):

$$- \sin w \cos X_1 + \cos w \cos X_2 = -k \sin u.$$

Analog ergeben sich wenn  $Y_1, Y_2$  und  $Z_1, Z_2$  statt  $X_1, X_2$  gesetzt werden folgende Gleichungen:

$$- \sin w \cos X_1 + \cos w \cos X_2 = -k \sin u$$

$$- \sin w \cos Y_1 + \cos w \cos Y_2 = \frac{k^2 \sin u \cos u}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 u}}$$

$$- \sin w \cos Z_1 + \cos w \cos Z_2 = 0.$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$1 = \frac{k^2 \sin^2 u}{1 - k^2 \cos^2 u}$$

also  $k^2 = 1$ . Nimmt man  $k = 1$ , so ist:



$$9) \cos X = \cos u, \quad \cos Y = \sin u, \quad \cos Z = 0.$$

$$- \sin w \cos X_1 + \cos w \cos X_2 = - \sin u$$

$$- \sin w \cos Y_1 + \cos w \cos Y_2 = \cos u$$

$$- \sin w \cos Z_1 + \cos w \cos Z_2 = 0.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\cos w \cos X_1 + \sin w \cos X_2 = 0,$$

$$\cos w \cos Y_1 + \sin w \cos Y_2 = 0,$$

$$\cos w \cos Z_1 + \sin w \cos Z_2 = 1,$$

oder:

$$\cos X_1 = \sin u \sin w, \quad \cos Y_1 = -\cos u \sin w, \quad \cos Z_1 = \cos w,$$

$$\cos X_2 = -\sin u \cos w, \quad \cos Y_2 = \cos u \cos w, \quad \cos Z_2 = \sin w.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und der Gleichungen 9) erhält man:

$$10) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{d\xi}{ds} = \cos \theta \cos X + \sin \theta \cos X_1 = \\ \quad \cos u \cos \theta + \sin u \sin w \sin \theta \\ \cos \beta = \frac{d\eta}{ds} = \cos \theta \cos Y + \sin \theta \cos Y_1 = \\ \quad \sin u \cos \theta - \cos u \sin w \sin \theta, \\ \cos \gamma = \frac{d\zeta}{ds} = \cos \theta \cos Z + \sin \theta \cos Z_1 = \\ \quad \sin \theta \cos w. \end{array} \right.$$

Nimmt man  $u$  als unabhängige Variabele, so folgt aus der letzten Gleichung 10) nach 8):

$$\frac{d\zeta}{du} = r \cos^2 w$$

und da nach 4) die rechte Seite constant gleich  $a$  ist, so folgt:

$$\frac{d\zeta}{du} = a$$

also, mit Weglassung einer unnöthigen Constanten:

$$11) \quad \zeta = au.$$

Die beiden ersten Gleichungen 10) geben:

$$\sin u \frac{d\xi}{ds} - \cos u \frac{d\eta}{ds} = \sin w \sin \theta,$$

$$\cos u \frac{d\xi}{ds} + \sin u \frac{d\eta}{ds} = \cos \theta,$$

oder nach 8)  $u$  als unabhängige Variabele eingeführt:

$$\sin u \frac{d\xi}{du} - \cos u \frac{d\eta}{du} = r \sin w \cos w = a \tan w,$$

$$\cos u \frac{d\xi}{du} + \sin u \frac{d\eta}{du} = \cos \theta \frac{ds}{du}.$$

Differentiirt man die erste Gleichung nach  $u$ , zieht darauf die zweite Gleichung ab, so folgt:

$$\sin u \frac{d^2 \xi}{du^2} - \cos u \frac{d^2 \eta}{du^2} = \left( \frac{a}{\cos^2 w} \frac{dw}{ds} - \cos \theta \right) \frac{ds}{du}.$$

Nach 4) verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung, es ist also:

$$\sin u \frac{d^2 \xi}{du^2} - \cos u \frac{d^2 \eta}{du^2} = 0.$$

Ist  $U$  eine beliebige Function von  $u$ , setzt man:

$$\frac{dU}{du} = U', \quad \frac{d^2 U}{du^2} = U'', \dots$$

so genügt man der obigen Gleichung durch:

$$\xi = (U'' - U) \cos u + 2U' \sin u$$

$$\eta = (U'' - U) \sin u - 2U' \cos u.$$

Setzt man:

$$\Delta = \sqrt{a^2 + (U''' + U')^2 + (U'' + U)^2},$$

so geben die Gleichungen 11) und 12):

$$\frac{ds}{du} = \Delta,$$

$$\Delta \cdot \cos \alpha = (U''' + U') \cos u + (U'' + U) \sin u,$$

$$\Delta \cdot \cos \beta = (U''' + U') \sin u - (U'' + U) \cos u,$$

$$\Delta \cdot \cos \gamma = a.$$

Setzt man weiter zur Abkürzung

$$\Delta_1 = \sqrt{[a^2 + (U'' + U)^2]},$$

so finden die Gleichungen statt:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta_1 \cos \lambda &= [a^2 + (U'' + U)^2] \cos u \\ &\quad - (U''' + U') (U'' + U) \sin u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Delta_1 \cos \mu &= [a^2 + (U'' + U)^2] \sin u \\ &\quad + (U''' + U') (U'' + U) \cos u, \end{aligned}$$

$$\Delta \Delta_1 \cos \nu = -a (U''' + U')$$

$$\Delta_1 \cos l = a \sin u, \quad \Delta_1 \cos m = -a \cos u$$

$$\Delta_1 \cos n = -(U + U'').$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{U''' + 2U'' + U}{\Delta^3} \sqrt{[a^2 + (U + U'')^2]}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{a^2 + (U + U'')^2}.$$

Die doppelten Werthe von  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  geben:

$$\Delta \cos \theta = U''' + U'$$

$$\Delta \sin \theta \sin w = U'' + U, \quad \Delta \sin \theta \cos w = a.$$

Die Gleichung 3) giebt noch die Annahme  $\varrho = \infty$ . Die Generatricen der Fläche gehn dann durch eine feste Gerade. Für eine Gerade kann man die Richtungen, bestimmt durch die Winkel

$$\alpha, \beta, \gamma;$$

$$\lambda, \mu, \nu;$$

$$l, m, n;$$

mit den Coordinatenaxen zusammenfallen lassen.  
Man hat dann:

$$\cos X = \sin \theta \cos \varphi, \quad \cos Y = \sin \theta \sin \varphi, \quad \cos Z = \cos \theta.$$

Im vorliegenden Falle ist die feste Gerade zur Axe der  $z$  genommen, so dass also  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\zeta=s$ . Die Werthe von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind dann bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = v \sin \theta \cos \varphi, \quad y = v \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = s + v \cos \theta.$$

Für  $\varrho = \infty$  ist auch  $r = \infty$ , die Gleichungen 1) geben dann:

$$p = -\frac{d\varphi}{ds} \sin \theta, \quad p_1 = \frac{d\varphi}{ds} \cos \theta, \quad q = \frac{d\theta}{ds}$$

Die Gleichungen 2) lassen sich hierdurch auf folgende Art darstellen, wo  $\frac{d\varphi}{ds} = \varphi'$ ,  $\frac{d\theta}{ds} = \theta'$  gesetzt ist:

$$\varphi' \cdot \cos \theta = \frac{\frac{d}{ds} \left( \frac{\theta'}{\varphi' \sin \theta} \right)}{1 + \left( \frac{\theta'}{\varphi' \sin \theta} \right)^2}$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \theta' = 0.$$

Sind  $a$  und  $b$  zwei Constanten, von denen keine verschwinden kann, so erhält man durch Integration:

$$1 + \left( \frac{\theta'}{\varphi' \sin \theta} \right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \theta$$

$$\varphi' \sin^2 \theta = a.$$

oder:

$$\varphi' \sin^2 \theta = a, \quad (\theta' \sin \theta)^2 = b^2 \sin^2 \theta - a^2.$$

Setzt man:

$$14) \quad b \cos \theta = \cos u \sqrt{b^2 - a^2},$$

so ist:

$$15) \quad \frac{du}{ds} = b.$$

Nimmt man  $u$  als unabhängige Variabele, so erhält man:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{a}{\sin^2 \theta} \frac{ds}{du} = \frac{ab}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}.$$

Lässt man eine Constante weg, welche sich nur auf eine Drehung des Coordinatensystems um die Axe der  $z$  bezieht, so ist:

$$\text{tang } \varphi = \frac{b}{a} \text{ tang } u.$$



Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 13), 14), 15) giebt:

$$x = v \frac{a}{b} \cos u, \quad y = v \sin u,$$

$$z = \frac{u}{b} + v \cos u \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b},$$

oder:

$$bz - x \frac{b}{a} \sqrt{b^2 - a^2} = \arctang \frac{ay}{bx}.$$

Durch ein Missverständniss ist auf Seite 507 ein allgemeiner Satz auf zwei Flächen beschränkt, welche eigentlich von der allgemeinen Regel eine Ausnahme bilden. Verschwindet in jedem Punkte einer Fläche die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, so sind die Flächen, welche diese Eigenschaft haben, paarweise so mit einander verbunden, dass dieselben sich auf einander abwickeln lassen und den asymptotischen Linien der einen Fläche Krümmungslinien der andern Fläche entsprechen. Ist nun eine der Flächen eine Rotationsfläche, so lässt sich dieselbe auf einer andern Rotationsfläche, so abwickeln, dass die Krümmungslinien ihren Charakter bewahren. Man erhält so eine Fläche für welche nicht die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwindet und deren Krümmungslinien den asymptotischen Linien einer sogenannten Minimumsfläche entsprechen. Die Minimumsfläche ist in diesem Falle die Schraubenfläche. Nimmt man für dieselbe:

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u, \quad z = au,$$

so hat man für die Rotationsfläche die Gleichungen:

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{b} \cos bu, \quad y = \frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{b} \sin bu$$

$$z = \int \sqrt{1 - \frac{1}{b^2} \frac{v^2}{a^2 + v^2}} dv.$$

In den letzten Gleichungen ist  $b$  eine von Null verschiedene Constante.

Was den allgemeinen Fall betrifft, so setzt man  $i = \sqrt{-1}$

$$16) \quad u + vi = p, \quad u - vi = q.$$

Ist  $P$  eine beliebige Function von  $p$ ,  $Q$  eine Function von  $q$ ,

$$P' = \frac{dP}{dp}, \quad Q' = \frac{dQ}{dq},$$

setzt man:

$$17) \left\{ \begin{array}{l} 4x = \int \frac{P^2 - 1}{P'} dp + \int \frac{Q^2 - 1}{Q'} dq, \\ 4y = i \int \frac{P^2 + 1}{P'} dp - i \int \frac{Q^2 + 1}{Q'} dq, \\ 2z = \int \frac{P}{P'} dp + \int \frac{Q}{Q'} dq, \end{array} \right.$$

so ist  $(x, y, z)$  ein Punkt einer Minimumsfläche, für den Fall, dass  $u$  und  $v$  die Argumente

der Krümmungslinien sind. Die obigen Gleichungen geben für  $x, y, z$  immer reelle Werthe wenn man setzt:

$$P = \varphi(p) + i\psi(p), \quad Q = \varphi(q) - i\psi(q),$$

wo  $\varphi, \psi$  beliebige Functionen ihrer Argumente sind. Für:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = E,$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = G,$$

folgt:

$$(18) \quad E = G = \frac{(1 + PQ)^2}{4P'Q'}.$$

Seien nun  $x, y, z$  die Coordinaten eines Punctes einer Minimumsfläche, für welche  $E$  und  $G$  dieselben Werthe haben wie in 18), aber nun  $u$  und  $v$  die Argumente der asymptotischen Linien sind. Für die Coordinate  $x$  hat man die Gleichungen:

$$2\frac{d^2x}{d^2u} = \frac{1}{E} \frac{dE}{du} \frac{dx}{du} - \frac{1}{G} \frac{dE}{dv} \frac{dx}{dv},$$

$$2\frac{d^2x}{d^2v} = -\frac{1}{E} \frac{dG}{du} \frac{dx}{du} + \frac{1}{G} \frac{dG}{dv} \frac{dx}{dv},$$

Wegen  $E = G$  folgt:

$$\frac{d^2x}{du^2} + \frac{d^2x}{dv^2} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{du^2} - \frac{d^2x}{dv^2} = \frac{1}{E} \frac{dE}{du} \frac{dx}{du} - \frac{1}{E} \frac{dE}{dv} \frac{dx}{dv}.$$

Mittelst der Gleichungen 16) und 18) gehn die vorstehenden Gleichungen über in:

$$\frac{d^2x}{dp \, dq} = 0$$

$$\frac{1}{P'} \frac{d}{dp} \left( P' \frac{dx}{dp} \right) + \frac{1}{Q'} \frac{d}{dq} \left( Q' \frac{dx}{dq} \right) =$$

$$2 \frac{QP' \frac{dx}{dp} + PQ' \frac{dx}{dq}}{1 + PQ}$$

Setzt man in der zweiten der vorstehenden Gleichungen:

$$19) \quad P' \frac{dx}{dp} = P_1, \quad Q' \frac{dx}{dq} = Q_1,$$

so sind wegen der ersten Gleichung  $P_1$  und  $Q_1$  respective nur von  $p$  und  $q$  abhängig. Nimmt man für einen Augenblick  $P$  und  $Q_1$  zu unabhängigen Variabeln so folgt:

$$20) \quad \frac{dP_1}{dP} + \frac{dQ_1}{dQ} = 2 \frac{QP_1 + PQ_1}{1 + PQ}.$$

Durch Differentiation nach  $P$  und  $Q$  folgt:

$$\frac{d^2P_1}{dP^2} = \frac{2Q}{1 + PQ} \frac{dP_1}{dP} + 2 \frac{Q_1 - P_1 Q^2}{(1 + PQ)^2},$$

$$\frac{d^2 Q_1}{dQ^2} = \frac{2P}{1+PQ} \frac{dQ_1}{dQ} + 2 \frac{P_1 - Q_1 P^2}{(1+PQ)^2}.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit  $P$  die zweite mit  $Q$ , bildet die Summe der Producte, so folgt:

$$P \frac{d^2 P_1}{dP^2} + Q \frac{d^2 Q_1}{dQ^2} = \frac{2PQ}{1+PQ} \left( \frac{dP_1}{dP} + \frac{dQ_1}{dQ} \right) + 2 \left( \frac{1-PQ}{(1+PQ)^2} (QP_1 + PQ_1) \right)$$

Setzt man rechts aus 20) für  $QP_1 + PQ_1$  seinen Werth ein, so folgt:

$$P \frac{dP_1}{dP} + Q \frac{d^2 Q_1}{dQ} = \frac{dP_1}{dP} + \frac{dQ_1}{dQ}$$

oder:

$$P^2 \frac{d}{dP} \left( \frac{1}{P} \frac{dP_1}{dP} \right) + Q^2 \frac{d}{dQ} \left( \frac{1}{Q} \frac{dQ_1}{dQ} \right) = 0$$

d. h.

$$P^2 \frac{d}{dP} \left( \frac{1}{P} \frac{dP_1}{dP} \right) = f, \quad Q^2 \frac{d}{dQ} \left( \frac{1}{Q} \frac{dQ_1}{dQ} \right) = -f,$$

wo  $f$  eine Constante bedeutet. Aus diesen Gleichungen findet man:

$$P_1 = f_1 P^2 - f P + f_2,$$

$$Q_1 = f'_1 Q^2 + f Q + f'_2.$$

Wegen 20) findet man:  $f'_1 = f_2$ ,  $f'_2 = f_1$ . Mit Rücksicht auf die Gleichungen 19) findet man nun:

$$21) \quad \begin{aligned} P' \frac{dx}{dp} &= f_1 P^2 - f P + f_2, \\ Q' \frac{dx}{dq} &= f_2 Q^2 + f Q + f_1. \end{aligned}$$

Ebenso folgt:

$$22) \quad \begin{aligned} P' \frac{dy}{dp} &= g_1 P^2 - g P + g_2, \\ Q' \frac{dy}{dq} &= g_2 Q^2 + g Q + g_1, \\ P' \frac{dz}{dp} &= h_1 P^2 - h P + h_2, \\ Q' \frac{dz}{dq} &= h_2 Q^2 + h Q + h_1. \end{aligned}$$

Zwischen den Constanten  $f, g, h \dots$  ergeben sich leicht die nöthigen Relationen mittelst der Gleichungen 18) und:

$$\frac{dx}{du} \frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du} \frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du} \frac{dz}{dv} = 0,$$

oder mittelst der Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 0,$$



$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{dp} \frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp} \frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp} \frac{dz}{dq} = \frac{(1 + PQ)^2}{8P'Q'}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 21) und 22) geben:

$$23) \left\{ \begin{array}{l} f_1^2 + g_1^2 + h_1^2 = 0, \quad f_2^2 + g_2^2 + h_2^2 = 0, \\ ff_1 + gg_1 + hh_1 = 0, \quad ff_2 + gg_2 + hh_2 = 0, \\ f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = \frac{1}{8} \\ f^2 + g^2 + h^2 = -\frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

Eine genauere Untersuchung ergibt, dass  $f_1, g_1, h_1; f_2, g_2, h_2$  complexe, zu einander conjugirte Grössen sind. Ist  $k$  eine Constante, so hat man:

$$\begin{aligned} kf_1 &= \frac{f' + if''}{4}, & \frac{f_2}{k} &= \frac{f' - if''}{4}, \\ kg_1 &= \frac{g' + ig''}{4}, & \frac{g_2}{k} &= \frac{g' - ig''}{4}, \\ kh_1 &= \frac{h' + ih''}{4}, & \frac{h_2}{k} &= \frac{h' - ih''}{4}, \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned} f'^2 + g'^2 + h'^2 &= 1, & f''^2 + g''^2 + h''^2 &= 1, \\ f'f'' + g'g'' + h'h'' &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass man  $f', g', h'$  und  $f'', g'', h''$  als die Cosinus der Winkel ansehen kann, welche zwei feste Richtungen, die zu einander orthogonal sind, mit den Coordinatenachsen bilden. Nimmt man dieselben respective zu Axen der  $x$  und  $y$ , so ist:

$$\begin{aligned} f' &= 1, & g' &= 0, & h' &= 0, \\ f'' &= 0, & g'' &= 1, & h'' &= 0, \end{aligned}$$

folglich:

$$24) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{1}{4k}, & f_2 = \frac{k}{4}, \\ g_1 = \frac{i}{4k}, & g_2 = -\frac{ki}{4}, \\ h_1 = 0, & h_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 23) geben:  
 $f + ig = 0$ ,  $f - ig = 0$ ,  $f^2 + g^2 + h^2 = -\frac{1}{4}$ .  
 Man kann also setzen:

$$25) \quad f = 0, \quad g = 0, \quad h = -\frac{1}{2}i.$$

Die Gleichungen 21) und 22) geben nach 24) und 25) für  $x, y$  nur reelle Werthe wenn  $k = 1$ .  
 Unter dieser Annahme erhält man endlich:

$$\begin{aligned} 4x &= \int \frac{P^2 + 1}{P'} dp + \int \frac{Q^2 + 1}{Q'} dq, \\ 4y &= i \int \frac{P^2 - 1}{P'} dp + i \int \frac{Q^2 - 1}{Q'} dq, \\ 2z &= i \int \frac{P}{P'} dp - i \int \frac{Q}{Q'} dq. \end{aligned}$$

Vertauscht man  $x$  mit  $-y$ , und  $y$  mit  $x$ , so folgt:

$$26) \quad \begin{cases} 4x = i \int \frac{P^2 - 1}{P'} dp - i \int \frac{Q^2 - 1}{Q'} dq, \\ 4y = - \int \frac{P^2 + 1}{P'} dp - \int \frac{Q^2 + 1}{Q'} dq, \\ 2z = i \int \frac{P}{P'} dp - i \int \frac{Q}{Q'} dq. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen 17) und 26) sind zwei Flächen bestimmt, von denen eine als Biegung der andern angesehen werden kann, den Krümmungslinien der einen Fläche entsprechen die asymptotischen Linien der andern Fläche und

umgekehrt. Die Gleichungen 17) und 26) ergeben noch eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft beider Flächen, dass nämlich die Normalen in zwei correspondirenden Punkten einander parallel sind. Sollen sich umgekehrt zwei Flächen auf einander abwickeln lassen und die Normalen in je zwei entsprechenden Punkten beider Flächen parallel sein, so ergibt sich, dass für beide Flächen in jedem Punkte die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwinden muss. Die Bemerkung, dass zwei Minimumsflächen sich hinsichtlich ihrer Krümmungslinien und asymptotischen Linien derartig entsprechen, wie die Gleichungen 17) und 26) zeigen, ist zuerst ohne weiteren Beweis von Bonnet in den Comptes rendus t. 37 gemacht. Es lassen sich mittelst der Gleichungen 17) und 26) Systeme von algebraischen Flächen aufstellen, die auf einander abwickelbar sind. Setzt man z. B. in 17)  $P = bp$ ,  $Q = bq$ , so folgt, wenn nach Ausführung der Integrationen  $bp = \alpha$ ,  $bq = \beta$  und  $4b^2 = \frac{1}{a}$  gesetzt wird:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{8}(\alpha^3 + \beta^3) - (\beta + \alpha)$$

$$\frac{y}{ai} = \frac{1}{8}(\alpha^3 - \beta^3) + \alpha - \beta$$

$$\frac{z}{a} = \alpha^2 + \beta^2$$

Für  $\alpha\beta + 1 = t$  findet man:

$$\frac{1}{9} \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 - y^2}{2az} + \frac{4}{8} = \frac{1}{3} t^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{4}{9} = \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{9} t^3$$

und hieraus durch Elimination von  $t$ :

$$\left(\frac{1}{9} \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 - y^2}{2az} + \frac{4}{9}\right)^3 =$$

$$3\left(\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{2z^2}{9a^2} - \frac{8}{9} + \frac{x^2 - y^2}{2az}\right)^2$$

Für dieselbe Substitution geben die Gleichungen 26):

$$\frac{x}{ai} = \frac{1}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - (\alpha - \beta),$$

$$-\frac{y}{a} = \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3) + \alpha + \beta,$$

$$\frac{z}{ai} = \alpha^2 - \beta^2$$

folglich:

$$\frac{1}{9} \frac{z^2}{a^2} - \frac{xy}{az} + \frac{4}{9} = \frac{1}{9} t^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{4}{9} = \frac{1}{9} t^2 + \frac{1}{9} t^3.$$

Die Elimination von  $t$  giebt:

$$\left(\frac{1}{9} \frac{z^2}{a^2} - \frac{xy}{az} + \frac{4}{9}\right)^3 =$$

$$3\left(\frac{x^2 + y^2}{4a^2} + \frac{2z^2}{9a^2} - \frac{8}{9} + \frac{xy}{az}\right)^2$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 17) bestimmt zwei algebraische Flächen von denen eine als Biegung der andern angesehen werden kann.

---

# Die Wirkung und Vorkommen des Cytisin

von

**Dr. Wilhelm Marmé,**  
Docent der Pharmacologie.

Das Cytisin, der giftig wirkende Bestandteil der unter dem Namen »Goldregen« allgemein bekannten Zierpflanze, *Cytisus Laburnum* L., welche als krystallisirende, einfache und Doppelbase lösl. in Wasser und Weingeist sehr leicht (nicht in Aether) lösliche, stark alkalische Pflanzenbase von uns in Gemeinschaft mit Dr. Aug. Husemann, jetzigem Professor der Chemie und Physik an der Cantonschule zu Chur aus den unreifen Schoten u. reifen Samen hier wachsender Sträucher zuerst dargestellt. Zur Vervollständigung der von uns beiden gemeinschaftlich (Zeitschrift für Chemie 8. Jahrgang S. 101) und später von A. Husemann (Neues Jahrbuch für Pharmacie XXXI S. 1—21) gemachten Mittheilungen erlaube ich mir der königlichen Societät Resultate meiner im hiesigen physiologischen Institute angestellten Experimente und ergänzenden chemischen Untersuchungen nachstehend in gedrängter Uebersicht vorzulegen\*).

## 1. Die Wirkung des Cytisin auf Thiere.

1. Die toxische Wirkung des Cytisin des reinen Alkaloids sowohl wie des am be-

\*) Durch Dr. Aug. Husemann's Anstellung zu Chur und mit derselben verbundene Berufsgeschäfte und nothwendige literarische Arbeiten sahen wir uns genöthigt von der gemeinschaftlichen Fortsetzung der Untersuchung abzusehen. Wir einigten uns deshalb dahin, dass H. die Erledigung des rein chemischen Theils, ich dagegen die Lösung der physiologisch-toxicologischen Fragen übernehmen sollte.

sten krystallisirenden salpetersauren Salzes — erstreckt sich auf alle Thiertypen. Im Laufe der letzten Jahre war es allmählich möglich die Giftwirkung unseres Alkaloids experimentell zu prüfen und durch zum Theil sehr zahlreiche Wiederholungen festzustellen an nachbenannten Individuen.

*I. Typus. Protozoa.* Bodo, aus dem Darm des Froschs.

*II. Typus. Coelenterata.* Hydra viridis.

*III. Typus. Echinodermata.* Astropecten aurantiacus.

*IV. Typus. Vermes.* Ascaris mystax. Oxyuris ambigua. Hirudo medicinalis. Lumbricus terrestris. Lumbricus communis.

*V. Typus. Arthropoda.* a. Crustacea. Oniscus murarius. Porcellio scaber. Armadillium vulgare. Astacus fluviatilis. — b. Arachnoidea. Ixodes Ricinus. Dermanyssus avium. Dermanyssus coreaceus. Phalangium opilio. Epeira diadema. Legnaria domestica. Chelifer cancroides. — c. Myriapoda. Polydesmus complanatus. Lithobius forficatus. — d. Insecta. Aspidiolus Nerii. Aphis rosae. Hydrometra lacustris. Forficula auricularia. Locusta viridissima. Libellula virgo. Pulex irritans canis. Culex pipiens. Musca domestica. Vespa vulgaris. Vanessa urticae. Pieris brassicae (mit Raupe). Coccionella septempunctata. Meloë proscarabaeus. Lucanus cervus. Melolontha vulgaris. Gyrinus natator.

*VI. Typus. Mollusca.* Ostrea edulis. Anodonta anatina. Limax agrestis. Arion antiquorum. Helix pomatia.

*VII. Typus. Vertebrata.* a. *Pisces.* *Cyprinus carpio.* *Anguilla fluviatilis.* b. *Amphibia.* *Triton cristatus.* *Salamandra maculosa.* *Rana esculenta.* *Rana temporaria.* *Hyla arborea.* *Bombinator igneus.* *Bufo communis.* — c. *Reptilia.* *Anguis fragilis.* *Lacerta viridis.* *Lacerta agilis.* — d. *Aves.* *Podiceps minor.* *Podiceps cristatus.* *Anas boschas dom.* *Gallus domesticus.* *Columba livida.* *Hirundo urbica.* *Corvus corax.* *Corvus monedula.* *Corvus pica.* *Garrulus glandarius.* *Fringilla domestica.* *Fringilla canaria.* *Strix flammea.* *Strix passerina.* *Buteo vulgaris.* *Astur palumbarius.* *Falco peregrinus.* — e. *Mammalia.* *Capra hircus.* *Lepus caniculus.* *Cavia cobaya.* *Mus musculus.* *Erinaceus europaeus.* *Talpa europaea.* *Canis familiaris.* *Felis domestica.* *Vespertilio murinus.* *Vesperugo noctula.*

2. Die toxische Wirkung des Cytisin kommt — abgesehen von der äusseren Haut — von allen Applicationsstellen aus zu Stande. Von der Conjunctiva aus gelang es niemals lethale Intoxication herbeizuführen, es erfolgte von hier aus nur ein geringer Grad der Vergiftung, der bei Kaninchen leicht für Somnolenz gehalten werden kann. Dagegen erfolgt der tödliche Ausgang sehr leicht, wenn man das Gift auf die Schleimhaut der Luftwege, des Intestinaltractus oder des Urogenitalapparates bringt und nicht minder leicht nach endermatischer und subcutaner Application so wie endlich auch das Cytisin von serösen Häuten und am raschesten vom Blute aus seine giftige Wirkung entfaltet.





cotische Wirkung im engeren Sinne des Wortes lässt sich bei Thieren nicht erkennen. Alle ver-rathen keine Beeinträchtigung des Bewusstseins so lange sie überhaupt noch im Stande sind zweckentsprechende Bewegungen z. B. zur Abwehr von Belästigungen auszuführen.

6. Das Rückenmark und die motorischen Nerven werden zuerst excitirt; auf diese Excitation folgt eine mehr oder minder vollständige Lähmung und diese Lähmung beginnt in den peripherischen Enden der motorischen Nerven.

Die Erregung zeigt sich am augenscheinlichsten bei allen Vögeln, ferner bei *Bombinator igneus* und *Salamandra maculosa*. Die Unke bietet, wie wir in 6 Fällen sahen, ganz das Bild einer beginnenden Strychninvergiftung. Die Extremitäten werden mehr oder weniger rigide, der Leib des Thieres durch die halbsteifen Beine zollhoch erhoben ohne dass es zu wirklichem Tetanus kommt. *Salamandra maculosa* wird völlig starr; die vier Extremitäten werden nach rückwärts an den Leib gestreckt u. zugleich tritt oft aus den Hautdrüsen das weisse, giftige Secret hervor. Erst einige Zeit später wird der Körper schlaff; während er früher quer über einen Finger gelegt, eine gerade Linie bildete, senken sich nun allmählich Kopf und Schwanz zu beiden Seiten des Fingers herab.

Tauben und ohne Ausnahme auch alle anderen genannten Vögel zeigen ähnliche Symptome wie bei Nicotin-Vergiftung. Die Beine werden häufig erst eines nach dem anderen starr nach hinten gestreckt, die Zehen flectirt. Es fällt z. B. die Taube vornüber auf die Brust, kann aber in diesem Stadium der Vergiftung nicht nur die Flügel bewegen, sondern auch von ge-

eigneter Unterlage (der auf und abwärts bewegten Hand) aus noch ganze Strecken weit z. B. über das ganze Auditorium weg zur Decke des Zimmers fortfliegen, ganz ähnlich wie — alte, fluggeübte — Tauben, die mit kleinen Dosen von Coniin-Salzen vergiftet sind. Gelangen grosse Dosen auf einmal oder doch rasch zur Wirkung so gesellt sich bei grösseren Vögeln, wie Falken, Bussarden, Hähnen, zu der Starre der Beine auch heftiger Opisthotonus gerade wie bei Strychnintetanus.

Bei Fröschen sahen wir die Erregung der medulla nie so deutlich wie bei Unken. Immer aber werden hier nach Anwendung nicht zu grosser Dosen zuerst die vorderen Extremitäten der Willkühr entzogen, rigide, und zwar bald in der Weise, dass das Thier die beiden Arme zusammenpresst, (die Hände in einanderfaltet) oder sie ab und rückwärts unter das Abdomen streckt. Nöthigt man jetzt das Thier zum Sprunge, so schiebt es den Körper durch Bewegung der hinteren Extremitäten über die steifen vorderen vorwärts.

Die der Erregung folgende Lähmung beginnt in den peripherischen Enden der motorischen Nerven. Dies lässt sich bei vergifteten Fröschen mit vorgängiger (einseitiger) Unterbindung der Schenkelgefässe oder Anlegung einer Massensligatur mit Ausschluss des Nervus Ischiadicus durch die im Gegensatz zur Lähmung aller anderen Bewegungsnerven fortdauernde Erregbarkeit des betreffenden Schenkelnerven durch Inductionsströme (2 Grove's, Wippe, Du Bois Schlitten und Schlüssel) in der bekannten Weise demonstrieren.

Der Lähmung der Nerven scheint gleichfalls eine Reizung vorherzugehen. Man sieht nämlich

Die Trepplungen fibrilläre  
... über den  
... bald dort  
... Respiration und  
... verschiedenen

Die Erregung  
... nicht immer sehr  
... Extremitäten.  
... Bewegungen. Angerufen  
... die Stelle  
... selbst bei die-  
... das Thier fällt  
... auf die Seite. Hunde  
... es, weil  
... nicht zur  
... still und  
... wohl  
... Zustand, der  
... gehalten wor-

Die Muskeln sind  
... ihrer motorischen  
... in ihrer eingebrachte me-  
... keine Zuckung  
... noch voll-  
... Die Paradocontractilität der  
... lange Zeit nach der  
... Nerven erhalten. All-  
... sich in der Weise  
... Contraction  
... in Erschlaffung zu-

... der Meizung zur Winters-  
... Nahrung narcotisirten sich  
... Cyt. Lab. ab-  
... abzustumpfen!



und schon auf geringere Dosen bei erhaltenen als bei durchtrennten Nerven. Die Reizung der peripherischen Vagusenden erfordert geringere Cytisinmengen um Zwerchfellskrampf hervorzurufen, als das Vaguscentrum. Kommen relativ grosse Dosen auf einmal in die Blutbahn, z. B. bei Katzen 0,025, so geht der inspiratorische Krampf in Lähmung der Athmungsnerven über ohne vorherige Wiederkehr der Respirationsbewegungen.

Um den Einfluss des Cytisin auf das Circulationssystem festzustellen, waren sehr zahlreiche und zum Theil complicirte Experimente erforderlich, bei welchen mir die Herren Professor Dr. Merkel, Dr. Creite und Stud. med. Strüh auf das Bereitwilligste ihre sehr dankenswerthe Unterstützung gewährten.

10. Das vasomotorische Nervensystem wird durch Cytisin erregt. — Betrachtet man unter dem Mikroskop die Schwimmhaut oder das Mesenterium eines curarinisirten Frosches, bringt dann auf das feucht gehaltene Object einen winzigen Crystall des Giftes, so sieht man nach einiger Zeit die kleineren und grösseren Gefässe sich contrahiren, die letzteren oft bis auf den dritten Theil ihres früheren Lumens. Die Contraction erfolgt meist zuerst an einer Stelle ringförmig, erstreckt sich dann aber auch gleichmässig und besonders schön an Mesenterialgefässen auf die ganze Länge des im Gesichtsfelde liegenden Gefässes. Statt der directen Application eines Krystalls kann man auch das Gift in Lösung unter die Haut spritzen. Der Erfolg wird dadurch verzögert aber nicht verhindert. — Vielleicht kommt dem Cytisin auch eine direct auf die Gefässmuskulatur wirkende Reizwirkung zu.



12. welchem durch Reizung des Vagus Herzstillstand eintritt, vergiftet mit nicht zu kleinen Dosen durch Injection in eine Vene, so sieht man unter allen Umständen den Blutdruck bedeutend steigen und die Reizung der Vag. ist bei Thieren ohne jeden Einfluss auf die Herzaction selbst wenn die Rollen übereinander geschoben sind. Bei Kaninchen erreicht man häufig noch Verlangsamung und selbst Stillstand des Herzens durch electriche Reizung des Vagus, nicht aber wenn man gleichzeitig den Aortenbogen committirt. — Sind endlich sämtliche Nerven, welche bekannter Massen die Thätigkeit des Herzens beeinflussen, durchtrennt, eine Carotis mit dem Manometer verbunden, künstliche Respiration angeleitet, so sieht man auch jetzt gleich nach der Injection den Blutdruck steigen, selbst wenn auch noch die beiden Ni. Splanchnici durchschnitten sind.

13. Der Einfluss des Cytisin auf die im N. Vagus verlaufenden Hemmungsnerven ist mir bei Hunden und noch weniger bei Katzen, welche die Durchschneidung des Vagus am schlechtesten ertragen, nicht ganz deutlich geworden. Mag man alle Herznerven mit Ausnahme des N. Vagus eliminiren oder auch bestehen lassen und bei gleichzeitiger künstlicher Respiration kleine oder grosse Dosen Cytisin in die Blutbahn oder wirksame in das subcutane Bindegewebe bringen, so sieht man bei vorgängiger wie nachfolgender Durchschneidung des Vagus immer die Herzaction beschleunigt und den Blutdruck gesteigert, während electriche Reizung des Vagus ohne Einfluss auf die Herzthätigkeit bleibt. Hinderlich ist bei Hunden die zur Vermeidung anderer Störungen unbedingt nothwendige tiefe Narcose,





meisten Thieren nach subcutaner Application das Nistzen als eines der ersten Symptome Kau-  
bewegungen und Lecken eintreten.

11. Bei Vögeln und vielen Säugethieren  
erregt das Cytisin von allen Applicationsstellen  
ein Erbrechen u. zwar sowohl bei erhaltenen  
wie bei durchschnittenen N. Vagi. Die Ursachen  
dürften verschiedene sein. Hier mögen einmal  
die direkte Einwirkung auf die Magenwände,  
dann die reizende Wirkung auf die Enden und  
das Centrum des Vagus, vielleicht auch der bittere  
Geschmack des Cytisin und endlich möglicher  
Weise der unter allen Umständen erhöhte Blut-  
druck zusammen wirken. Kommen rasch grosse  
Mengen in die Blutbahn, so kann das Erbrechen  
ganz ausbleiben.

17. Das Cytisin erregt sowohl nach Einfüh-  
rung in den Magen und Darm wie nach Injection  
in das Gefässsystem oder nach subcutaner An-  
wendung gesteigerte, oft krampfhafte Peri-  
staltik. Nach Injection in das Gefässsystem  
hört man sehr bald lebhaftes Gurren im Leibe,  
die aufgelegte Hand fühlt, ja bisweilen sieht man  
durch die unverletzten Bauchdecken die lebhafte  
Bewegung der Eingeweide. Bei Hunden und  
Katzen gesellt sich hierzu angestrenktes Würgen  
und Erbrechen und äusserst energische Thätig-  
keit der prela abdominis. — Hat man grosse  
Hunde mit 4—5 CC. Tr. Opii simpl. von einer  
Schenkelvene aus so tief narcotisirt, dass auch nicht  
die leiseste Reflexaction durch operative Eingriffe  
verursacht wird, ein Zustand, in welchem die  
Respiration stark verlangsamt, die Herzaction  
meist enorm (von 5—8 auf 19—22 in 5 Sek.)  
beschleunigt ist, die Eingeweide in der geöffneten  
le bewegungslos und durch die prall-







Vergiftungen mit Theilen des Goldregens bei Menschen hie und da beobachtete purgirende Wirkung muss, soweit sie nicht durch individuelle Zufälligkeiten bedingt ist, auf die vermehrte Peristaltik als ihre Veranlassung zurückgeführt werden.

17. Weder bei Application in den Conjunctivalsack noch nach innerer Anwendung setzt Cytisin eine constante Wirkung auf die Pupille. In sehr vielen Fällen kommt während der Vergiftung weder Myosis noch Mydriasis zur Beobachtung. Bei ganz jungen Falken trat meistens, aber auch nicht immer, eine Verengung der weiten Pupille als erstes Symptom der Vergiftung auf nach subcutaner, nicht nach äusserer Application auf das Auge. Bei Säugethieren war gleichfalls häufig nichts zu beobachten bis zum Eintritt hochgradiger Athemnoth, welche meistens von Myosis begleitet war und welche letztere selbst nach dem Tode noch längere Zeit fortbestand. Umgekehrt sahen wir besonders bei Katzen nach Injection grosser Dosen (0,02—0,03 Grm Cyt. nitric) in kürzester Zeit möglichst starke Erweiterung der Pupille neben Vorfall der Nickhäute ohne vorgängige Verengung auftreten.

18. Die Körpertemperatur ist während der Vergiftung nur ganz zu Anfang etwas erhöht, sinkt dann aber stetig bis zum tödtlichen Ausgang.

19. Die Elimination des in den Körper gebrachten Cytisin erfolgt — abgesehen vom Erbrechen — vorzugsweise durch die Nieren. — Mit dem Harn cytinisirter Frösche kann man andere in charakteristischer Weise vergiften. Erhält man bei Kaninchen



Vergiftungen mit Theilen des Goldregens bei Menschen hie und da beobachtete purgirende Wirkung muss, soweit sie nicht durch individuelle Zufälligkeiten bedingt ist, auf die vermehrte Peristaltik als ihre Veranlassung zurückgeführt werden.

17. Weder bei Application in den Conjunctivalsack noch nach innerer Anwendung setzt Cytisin eine constante Wirkung auf die Pupille. In sehr vielen Fällen kommt während der Vergiftung weder Myosis noch Mydriasis zur Beobachtung. Bei ganz jungen Falken trat meistens, aber auch nicht immer, eine Verengung der weiten Pupille als erstes Symptom der Vergiftung auf nach subcutaner, nicht nach äusserer Application auf das Auge. Bei Säugethieren war gleichfalls häufig nichts zu beobachten bis zum Eintritt hochgradiger Athemnoth, welche meistens von Myosis begleitet war und welche letztere selbst nach dem Tode noch längere Zeit fortbestand. Umgekehrt sahen wir besonders bei Katzen nach Injection grosser Dosen (0,02—0,03 Grm Cyt. nitric) in kürzester Zeit möglichst starke Erweiterung der Pupille neben Vorfall der Nickhäute ohne vorgängige Verengung auftreten.

18. Die Körpertemperatur ist während der Vergiftung nur ganz zu Anfang etwas erhöht, sinkt dann aber stetig bis zum tödtlichen Ausgang.

19. Die Elimination des in den Körper gebrachten Cytisin erfolgt — abgesehen vom Erbrechen — vorzugsweise durch die Nieren. — Mit dem Harn cytinisirter Frösche kann man andere in charakteristischer Weise vergiften. *Erhält man bei Kaninchen künstlich die Respira-*





Vergiftungen mit Theilen des Goldregens bei Menschen hie und da beobachtete purgirende Wirkung muss, soweit sie nicht durch individuelle Zufälligkeiten bedingt ist, auf die vermehrte Peristaltik als ihre Veranlassung zurückgeführt werden.

17. Weder bei Application in den Conjunctivalsack noch nach innerer Anwendung setzt Cytisin eine constante Wirkung auf die Pupille. In sehr vielen Fällen kommt während der Vergiftung weder Myosis noch Mydriasis zur Beobachtung. Bei ganz jungen Falken trat meistens, aber auch nicht immer, eine Verengung der weiten Pupille als erstes Symptom der Vergiftung auf nach subcutaner, nicht nach äusserer Application auf das Auge. Bei Säugethieren war gleichfalls häufig nichts zu beobachten bis zum Eintritt hochgradiger Athemnoth, welche meistens von Myosis begleitet war und welche letztere selbst nach dem Tode noch längere Zeit fortbestand. Umgekehrt sahen wir besonders bei Katzen nach Injection grosser Dosen (0,02—0,03 Grm Cyt. nitric) in kürzester Zeit möglichst starke Erweiterung der Pupille neben Vorfall der Nickhäute ohne vorgängige Verengung auftreten.

18. Die Körpertemperatur ist während der Vergiftung nur ganz zu Anfang etwas erhöht, sinkt dann aber stetig bis zum tödtlichen Ausgang.

19. Die Elimination des in den Körper gebrachten Cytisin erfolgt — abgesehen vom Erbrechen — vorzugsweise durch die Nieren. — Mit dem Harn cytinisirter Frösche kann man andere in charakteristischer Weise vergiften. Erhält man bei Kaninchen künstlich die Respira-



Wirkung der motorischen Nerven stillsteht, bald ohne alle Convulsionen bis auf die erwarteten weit verbreiteten fibrillären Zuckungen, die bald hier bald da auftreten und oft noch eine halbe Stunde nach dem Stillstand der Respiration und Circulation vorkommen.

22. Der Sectionsbefund nach Cytisinvergiftung bietet abgesehen von den Folgen des Erstickungstodes durchaus nichts Characteristisches.

23. Der gerichtlich chemische Nachweis einer Cytisinvergiftung dürfte unter allen Umständen auf ~~grosse~~ Schwierigkeiten stossen und wenig Aussicht auf Erfolg darbieten. Der Mangel einer empfindlichen und characteristischen Reaction für das Cytisin, der Umstand, dass bei Lebzeiten meistens durch Emesis, vielleicht auch Catharsis und Diuresis der grösste Theil des Giftes aus dem Körper entfernt sein dürfte, würde den Erfolg einer chemischen Untersuchung der verschiedenen Körpertheile zur Darstellung des Giftes wahrscheinlich unmöglich machen. Bei der ausserordentlich geringen dosis lethalis war es uns nie möglich nach subcutaner Application des Giftes aus dem Erbrochenen Cytisin in einer zur Vergiftung kleinerer Thiere hinreichenden Menge aufzufinden.

24. Aus vergleichenden Experimenten mit wässrigen und weingeistigen Extracten der Samen, der Samenschale, der Blüthen, unreifen Schoten, der Blätter, der Rinde, der Wurzel halten wir uns berechtigt 1) sämtliche genannten Pflanzentheile für giftig und 2) das Cytisin für den alleinigen Träger der giftigen Wirkung zu erklären \*).

\*) Hätte J. Dougal zu seinen Experimenten nicht nur Kaninchen benutzt, so würde er nicht zu seinen irrigen



3. Das aus den Samen mittelst Aether ausgezogene fette Oel, von hellgelber Farbe und mildem Geschmack, wirkt nicht giftig. Einmal begegnete mir bei einem Kaninchen, dem ich wiederholt grössere Mengen dieses Oels in den Magen gebracht hatte, eine exquisite Diphtheritis des Darms. Da ich aber in vielen gerade durch diesen Befund veranlassten Wiederholungen nichts krankhaftes gesehen habe, muss ich diese eine Ausnahme als eine zufällige Complication aus anderen unbekannten Ursachen ansprechen. — Es scheint mir auch Scott Gray nicht Unrecht zu haben, wenn er in dem von Christison \*) mitgetheilten Vergiftungsfall die intensive und langanhaltende Darmaffection für eine Folge anderer Ursachen erklärt.

4. Dass das Cytisin nicht nur im *Cytisus Laburnum* vorkommt, sondern ausserdem in drei anderen Species von A. H. und mir gefunden worden ist, findet sich bereits in unserer ersten Mittheilung angegeben. Diese drei Species betrafen *Cyt. alpinus*, *supinus* und *elongatus*. Seit jener Veröffentlichung habe ich im Laufe der letzten Jahre noch einige andere Species hinsichtlich ihres Gehaltes an Cytisin und ihrer toxischen Wirkung auf Frösche untersucht. Die Species, von welchen mir Samen und Schoten, von einigen auch Rinde, durch den Gartenmeister des hiesigen botanischen Gartens zugestellt wurden, sind *Cytisus Weldenii*, *C. sessilifolius*, *C. capitatus*, *C. hirsutus* und *C. nigricans*. Alle bis auf die letztgenannte ergaben bei der chemischen Untersuchung und natürlich auch der experimentellen Prüfung an *Ranae* positive

\*) Ed. Med. and S. J. Oct. 1843. Auch Taylor (on Poisons II p. 840) erklärt die Angabe der Symptome für imperfect.









$$A_1 = \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1) \dots (k_6 - k_1)} \text{ u.s. f.}$$

2. Um nun mittelst dieser Parameter die Tangenten der Kummer'schen Fläche darzustellen, braucht man in (3) nur zwei derselben, etwa  $z$  und  $t$ , einander gleich zu setzen (cf. hier und im Folgenden die citirte Arbeit).

Betrachtet man dabei  $x$  und  $y$  als constant, so hat man jedesmal solche Tangenten, welche die Fläche in demselben Punkte berühren.  $x$  und  $y$  characterisiren also den Berührungspunkt, man kann sie als Coordinaten des Punktes auf der Fläche auffassen. Die von den Tangenten in zwei Punkten,  $x, y$  und  $x^1, y^1$ , gebildeten zwei Büschel sind dabei, gleichen Werthen von  $z = t$  entsprechend, projectivisch auf einander bezogen.

Setzt man drei der Parameter einander gleich, so erhält man die Haupttangente der Fläche.

Nimmt man die vier Parameter paarweise gleich, so hat man die Linien, welche in einer der 16 Doppelebenen der Fläche liegen oder durch einen der 16 Doppelpunkte derselben hindurchgehen.

Endlich die Annahme, dass alle Parameter einander gleich sind, ergiebt die Tangenten der in den 16 Doppelebenen gelegenen Berührungskegelschnitte, so wie die Erzeugenden der in den 16 Knotenpunkten berührenden Kegel.

Die einem bestimmten Complexe (1) angehörigen Geraden erhält man, wenn man einen der Parameter, etwa  $t$ , dem betreffenden  $\sigma$  gleich setzt.

Nimmt man zwei Parameter, etwa  $z$  und  $t$ , constant, so hat man die Linien der Congruenz,



$$\Sigma x_{\alpha} d^2 x_{\alpha} = 0,$$

oder, was vermöge (2) dasselbe ist:

$$\Sigma dx_{\alpha}^2 = 0.$$

Führt man in diese Gleichung die Parameter  $x, y, z, t$ , ein, so erhält man (vgl. Jacobi's Vorlesungen über Dynamik. p. 205):

$$\begin{aligned} (4) \quad 0 = & \frac{(x-y)(x-z)(x-t)}{(x+k_1)(x+k_2)\dots(x+k_6)} dx^2 \\ & + \frac{(y-z)(y-t)(y-x)}{(y+k_1)(y+k_2)\dots(y+k_6)} dy^2 \\ & + \frac{(z-t)(z-x)(z-y)}{(z+k_1)(z+k_2)\dots(z+k_6)} dz^2 \\ & + \frac{(t-x)(t-y)(t-z)}{(t+k_1)(t+k_2)\dots(t+k_6)} dt^2. \end{aligned}$$

Nimmt man nun etwa  $z$  und  $t$  constant, also  $dz = 0, dt = 0$ , so erhält man, indem sich aus (4) der Factor  $(x-y)$  forthebt, die Differentialgleichung der Umhüllungs-Curven der den beiden Complexen  $\sigma = z$  und  $\sigma = t$  gemeinsamen Congruenz in der quadrirbaren Form:

$$\begin{aligned} dx \sqrt{\frac{(x-z)(x-t)}{(x+k_1)(x+k_2)\dots(x+k_6)}} = \\ dy \sqrt{\frac{(y-z)(y-t)}{(y+k_1)(y+k_2)\dots(y+k_6)}}. \end{aligned}$$



# Das Weber'sche compensirte Magnetometer zur Bestimmung der erdmagnetischen Intensität;

von

**F. Kohlrausch**, corresp. Mitglieder.

Die Theorie dieses Magnetometers, welches eine bisherige Lücke in den erdmagnetischen Messinstrumenten ausfüllt, hat Herr Weber vor mehreren Jahren im mathematisch-physikalischen Seminar vorgetragen. Ich habe dasselbe nur ausführen lassen und die Beobachtungen angestellt, welche ich hier nebst einigen Bemerkungen über das Wesentliche des Instrumentes als Beispiele seiner Anwendung mittheile.

Das compensirte Magnetometer soll zunächst ein Instrument zur bequemen und genauen Vergleichung der Horizontal-Intensität an verschiedenen Orten sein. Diese Aufgabe macht es zum Reisemagnetometer und zu einem nicht unwichtigen Hilfsapparat im physikalischen Laboratorium, wo der bedeutenden magnetischen Localinflüsse wegen sehr oft das Bedürfniss dieser Vergleichung vorliegt. Die für die genannten Zwecke erforderliche Genauigkeit, dass nämlich die zu befürchtenden Beobachtungsfehler kleiner seien als die Variationen des Erdmagnetismus, leistet der Apparat vollständig. Dabei ist in der Regel keine zeitraubende oder besondere Festigkeit erfordernde Aufstellung verlangt, und die Beobachtung besteht in einer einfachen Bussoleablesung.

Eine absolute Bestimmung mit dem Instrument ist unnöthig, sobald die vergleichende Be-



einander gleichen Magneten  $MM$  und  $mm$ , in deren Mittelpunkte die Bussole sich befindet. Beiden Ablenkungsbeobachtungen liegen alle Magnete ostwestlich, so dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte von  $MM$  den magnetischen Meridian vorstellt.

MmmM

Die Pole gleichbenannter Magnete sind gleichgerichtet, die von  $m$  aber entgegengesetzt wie die von  $M$ , so dass die ablenkenden Kräfte auf die Bussole sich summieren. Bezeichnen wir durch  $L$  die Länge,  $R$  den Abstand der Magnete  $MM$  von der Nadel, durch  $l$ ,  $r$  die entsprechenden Grössen für die Magnete  $mm$ , und endlich durch  $\lambda$  die Länge der Nadel; setzen wir ferner voraus, Magnete und Nadel seien nach allen Dimensionen ähnlich gestaltet und ähnlich magnetisirt, so liefert die Theorie, damit das zweite Glied der Reihe Null wird, die Bedingungen

$$L^2 = 2l^2 + \lambda^2 \text{ und } \frac{R^5}{r^5} = \frac{3}{4} \frac{L^3}{l^3}.$$

Diesen beiden Gleichungen kann z. B. genügt werden, wenn man setzt

$$\lambda : l : L = 1 : 2 : 3 \text{ und } \frac{R}{r} = 1,204.$$

Hiernach ist das Magnetometer construirt. Die Bussolennadel hat von oben gesehen die Gestalt eines Rhombus von 16 Mm Länge und 4 Mm Breite mit einer Durchbohrung von 3 Mm Durchmesser. Die Dicke beträgt 1 Mm. An den Magneten  $m$  sind unter Beibehaltung der Gestalt alle Dimensionen verdoppelt, an  $M$  verdreifacht. Der Abstand der Mittelpunkte der  $m$  von ein-





Ist die Temperatur an beiden Orten verschieden und hat man ermittelt, dass der Magnetismus der Stäbe für  $1^\circ$  um  $\mu$  (in Theilen des ganzen Magnetismus) abnimmt, so ist der Ausdruck, noch mit  $1 + \mu (\vartheta_1 - \vartheta)$  zu multipliciren, wenn durch  $\vartheta$  und  $\vartheta_1$  die beiden Temperaturen bezeichnet werden.

So wurden z. B. die Intensitäten in dem Göttinger magnetischen Observatorium und in dem eisenfreien Pavillon des physikalischen Institutes verglichen, bei merklich gleicher Temperatur. Es fanden sich die Ablenkungswinkel

im Observatorium  $51^\circ 01'$

im Pavillon  $50^\circ 91'$

wonach die Intensität am letzteren Orte um  $\frac{1}{3}$  Procent grösser ist.

Ausserdem wurde u. A. eine Vergleichung des Pavillons mit dem westlichen Zimmer im ersten Stockwerk des Instituts vorgenommen zum Zweck der in den Nachrichten 1870 S. 401 mitgetheilten Messungen. Die Intensität fand sich am letztgenannten Orte um 2,8 Procent grösser.

2) Ist zwischen den Beobachtungen an beiden Orten eine grössere Zeit verflossen, so ist die etwaige Veränderung des Stabmagnetismus zu berücksichtigen. Man beobachtet dann, ausser dem Ablenkungswinkel, die Schwingungsdauer des Rahmens mit den Magneten, nachdem man diese gleichgerichtet hat. Die Schwingungsdauern an beiden Orten mit  $t$  und  $t_1$  bezeichnet, ist

$$\frac{T}{T_1} = \frac{t_1}{t} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi}}. \quad (2.)$$

Hierbei ist angenommen, dass die Magnetis-

men der Stäbe  $M$  und  $m$  sich in gleichem Verhältniss geändert haben. Ohne diese Annahme ist noch die zweite Schwingungsdauer  $\tau$  und  $\tau_1$  zu ermitteln, nachdem die kleineren Magnete um  $180^\circ$  gewendet sind. Dann hat man

$$\frac{T}{T_1} = \frac{t_1 \tau_1}{t \tau} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 r^3 (\tau^2 + t^2) + 2 R^3 (\tau^2 - t^2)}{\operatorname{tg} \varphi r^3 (\tau_1^2 + t_1^2) + 2 R^3 (\tau_1^2 - t_1^2)}}. \quad (3.)$$

Nach diesen Vorschriften wurde die Intensität in Zürich mit der in Göttingen verglichen und um 7,7 Procent grösser gefunden, was so gut wie genau mit den Lamont'schen Karten übereinstimmt. Das Verhältniss  $\frac{m}{M}$  hatte sich nur um  $\frac{1}{400}$  geändert, so dass die einfachere Formel (2.) bis auf  $\frac{1}{2500}$  dasselbe Resultat lieferte.

3) Für eine absolute Bestimmung von  $T$  endlich ist es nothwendig, das Trägheitsmoment  $K$  und den Torsionscoefficienten des Aufhängefadens zu kennen. Nennen wir den letzteren im Verhältniss zu der erdmagnetischen Directionskraft bei gleich gerichteten Magneten  $\Theta$ , so setzen wir  $\Theta' = 2 \Theta \frac{\tau^2}{t^2 + \tau^2}$  und haben

$$T^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 K}{t^2 \tau^2 \operatorname{tang} \varphi} \left( \frac{\tau^2 + t^2}{R^3 (1 + \Theta')} + 2 \frac{\tau^2 - t^2}{r^3} \right). \quad (4.)$$

Eine solche Bestimmung habe ich in dem bereits erwähnten eisenfreien Pavillon des physikalischen Instituts am 14. August 1870 ausgeführt und  $T = 1,840$  gefunden. Herr Riecke fand etwa ein Jahr früher an demselben Orte  $T = 1,848$ . Beide Werthe stimmen unter einander und mit den im Observatorium gefundenen

Werthen (1,8396 im August 1869) innerhalb der zu erwartenden Grenzen überein, so dass das neue Instrument allen Ansprüchen genügt, welche an ein transportabeles Magnetometer zur Intensitätsbestimmung gestellt werden können.

Der Preis des in der Werkstätte des Herrn Dr. Meyerstein ausgeführten Magnetometers stellt sich incl. eines leicht transportablen Statives für die Ablenkungen und Schwingungsbeobachtungen auf gegen 50 Thaler.

Zürich, December 1870.

---



Erklärung des Hebräerbriefs: Prof. *Ritschl* fünfstündig um 9 Uhr.

---

Kirchengeschichte: Prof. *Wagenmann* sechsstündig um 8 Uhr.

Kirchengeschichte I. Theil: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte des XIX. Jahrhunderts: Professor *Wagenmann* dreistündig um 7 Uhr, öffentlich.

Dogmengeschichte: Prof. *Duncker* fünfmal um 11 Uhr und Sonnabends um 9 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Schüberlein* fünfmal um 4 Uhr; Prof. *Matthaei* zweimal, Donnerst. und Freit., um 2 Uhr.

---

Dogmatik I. Theil: Prof. *Ritschl* fünfmal um 8 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Schüberlein* fünfmal um 12 Uhr.

---

Praktische Theologie II. Theil (Liturgik, Homiletik, Theorie der Seelsorge und Kirchenpolitik): Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal von 3—4 Uhr.

Praktische Theologie in ihren Grundzügen: Professor *Schüberlein* viermal um 5 Uhr.

---

Die Uebungen des Königl. Homiletischen Seminars leiten abwechselungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabends 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabends 3—4 Uhr; Prof. *Wiesinger* Mittwochs 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Professor *Schüberlein* Sonnabends 9—10 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang giebt *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

---

Eine dogmatische Societät leitet Prof. *Schüberlein* Freit. um 6 Uhr; eine historisch-theologische Prof. *Wagenmann* Freit. 6 Uhr.

---

Die exegetischen, kirchenhistorischen und systematischen Conversatorien im theologischen Stift werden in



Gemeines deutsches Staatsrecht: Professor *Zachariae* sechsstündig um 12 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Frensdorff* dreimal wöch. von 12—1 Uhr.

Theorie des Civilprocesses: Prof. *Hartmann* sechsmal wöch. von 12—1 Uhr und zweimal zu einer andern passenden Stunde.

Pandectenpracticum: Prof. *Thöl* Mont. und Donnerst. von 4—5 und von 5—6 Uhr.

Processpracticum: Prof. *Briegleb* Dienst. und Freit. von 4—6 Uhr.

## Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Anthropologie mit Benutzung der Blumenbach'schen Sammlung (auch für Nicht-Mediciner) trägt Dr. *Merkel* Montag, Mittwoch, Freitag von 4—5 Uhr vor.

Die Knochen- und Bänderlehre trägt Dr. *Merkel* Dienstag, Donnerstag, Sonnabend von 11—12 Uhr vor.

Systematische Anatomie II. Theil (Gefäß- und Nervenlehre): Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Allgemeine Anatomie: Prof. *Henle*, Montag, Mittwoch, Freitag von 11—12 Uhr.

Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krümer* privatissime, Dr. *Merkel* wie bisher.

Mikroskopische Curse im pathologischen Institute hält Prof. *Krause* wie bisher für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 12 Uhr oder zu anderen passenden Stunden.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* sechs Mal wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie I. Theil (Physiologie der Ernährung): Prof. *Meissner* fünf Mal wöchentlich von 10—11 Uhr.

Physiologie der Zeugung nebst allgemeiner und specieller Entwicklungsgeschichte: Prof. *Meissner*, Freitag von 5—7 Uhr.

Physiologische Optik s. S. 65.





Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich von 7—8 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von 10 $\frac{1}{2}$ —12 Uhr.

Chirurgie I. Theil: Prof. *Baum* fünf Mal wöchentlich von 4—5 Uhr, Sonnabend von 3—4 Uhr.

Specielle Chirurgie trägt Prof. *Lohmeyer* von 11—12 Uhr vor.

Ueber Knochenbrüche und Verrenkungen trägt Prof. *Baum* Mittwoch und Sonnabend von 2—3 Uhr publice vor.

Pathologie und Therapie der Augenkrankheiten lehrt Prof. *Schweigger* Montag, Dienstag, Donnerstag, von 3—4 Uhr.

Die Theorie des Augenspiegels trägt Prof. *Schweigger* publice am Freitag von 3—4 Uhr vor.

Die chirurgische Klinik und Poliklinik hält Prof. *Baum* täglich um 9 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Schweigger* Montag, Dienstag, Donnerst. u. Freitag von 12—1 Uhr.

Uebungen in chirurgischen Operationen an der Leiche leitet Prof. *Baum* im Anatomiegebäude so oft Leichen vorhanden von 5 Uhr Nachm. an.

Praktische Uebungen im Gebrauch des Augenspiegels leitet Prof. *Schweigger* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Gynaekologie trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krätmer* in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr.

Psychiatrische Klinik hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Sanitätspolizei lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 7—8 Uhr.

Die Lehre von den Krankheiten der Hausthiere in Verbindung mit klinischen Demonstrationen im Thier.

hospitale trägt Dr. *Luelfing* wöchentlich sechsmal von 7—8 Uhr vor.

## Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie: Dr. *Stumpf*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Ausführliche Darstellung und Kritik der philosophischen Systeme von Kant an: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Logik verbunden mit Erklärung von Trendelenburgs *elementa logices aristoteleae*: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Logik: Prof. *Peip*, Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 7 Uhr früh.

Metaphysik: Prof. *Lotze* 4 St., 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. u. Donnerst. 11 Uhr.

Aesthetik: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Lotze*, 4 St., 4 Uhr.

Prof. *Baumann* wird in seiner philosophischen Societät aus Kants Kritik der reinen Vernunft den Abschnitt von der transcendenten Logik behandeln, Freit. 6 Uhr.

Prof. *Peip* wird in seinen philosophischen Societäten Nachm. 5—6 Uhr am Donnerst. Anselms von Canterbury „Monol.“ und „Prosl.“, am Freit. Desselben „Cur Deus homo“ erklären.

Dr. *Peipers* wird in seiner Societät ausgewählte Abschnitte des aristotelischen Organons erklären Freitags von 6—8 Uhr.

Dr. *Stumpf* wird in seiner philosoph. Societät das 1. Buch der aristotelischen Metaphysik erklären.

Geschichte der Erziehung: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Dienst. 11 Uhr.

## Mathematik und Astronomie.

Die Stereometrie mit der sphärischen Trigonometrie: Prof. *Ulrich*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 10 Uhr.

Praktische Geometrie mit Uebungen auf dem Felde: *derselbe* 4 mal wöch., von 5—7 Uhr.

Analytische Geometrie der Ebene: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Ausgewählte Capitel der höhern Geometrie: Prof. *Clebsch*, Mont. Donnerst. 11 Uhr.

Theorie der Zahlengleichungen: Prof. *Stern*, 4 St., 8 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Stern*, 5 St. 7 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof. *Enneper*, Mont. Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Functionen complexer Veränderlicher, insbesondere Elliptische Abelsche und Riemannsche Functionen: Prof. *Schering*, 4 St., 9 Uhr früh.

Ueber die Plueckerschen Complexe: Dr. *Klein*, 1 oder 2 St., unentgeltlich.

Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf mathematische Physik: Dr. *Minnigerode*, 4 St.

Ueber theoretische Optik: Dr. *Klein*, 4 St.

Uebungen über Gegenstände der neuern Algebra: Prof. *Clebsch*, Mittw. 12 Uhr, öffentlich.

Magnetische Uebungen: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math. physikalischen Seminars, Freit. 6 Uhr.

Zu mathematischen Uebungen über irgend einen Theil der Geometrie er bietet sich Dr. *Klein*.

Sphärische Astronomie: Prof. *Klinkerfues*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit. um 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet Prof. *Ulrich* die mathematischen Uebungen Mittw. 10 Uhr; trägt Prof. *Stern* über einige Eigenschaften der Kettenbrüche vor, Mittw. 8 Uhr; giebt Prof. *Klinkerfues* einmal wöch. Anleitung zu astronomischen Beobachtungen. — Vgl. Naturwissenschaften S. 66.

## Naturwissenschaften.

Zoologie in übersichtlicher Darstellung des Gesamtgebietes: Prof. *Claus*, täglich, 7 Uhr.

Specielle Naturgeschichte der Säugethiere: *Derselbe*, Dienst. Donnerst. Sonnab., 11 Uhr.



In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing* Mittwoch um 11 Uhr. Vgl. Mathematik S. 64.

Mathematische Physik, Theoretische Optik: vgl. Mathematik S. 64.

Chemie: Prof. *Wöhler*, 6 St. 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Donnerst. 12 Uhr. — Organische Chemie, speciell für Mediciner: Prof. *von Uslar*, in später zu bestimmenden Stunden.

Organische Experimentalchemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 St., 8 Uhr.

Analytische Reaktionen der organischen Chemie: Dr. *Tollens*, 1 St., 8 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Freitag 12 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, 4 St., 4 Uhr.

Die Vorlesungen über Pharmacie und Pharmacognosie s. unter Medicin S. 6.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Wicke* leitet die chemischen Uebungen für die Studirenden der Landwirthschaft.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) 8—12 und 3—5 Uhr.

## Historische Wissenschaften.

Alte Länder- und Völkerkunde: Prof. *Wachsmuth*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 12 Uhr.

Entdeckungsgeschichte und Geographie von Amerika: Prof. *Wappäus*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit. 12 Uhr.

Allgemeine Geschichte des Mittelalters: Prof. *Pauli*, 4 St., 5 Uhr.

Geschichte der grösseren Staaten Europas im 14. und 15. Jahrhundert: Dr. *Steindorff*, Dienst. Donnerst. Freit., 9 Uhr.



Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Ueber Heuwerth und Futtermischung: Prof. *Henneberg*, Mittw. 11–1 Uhr, öffentlich.

Landwirthschaftliches Practicum: Prof. *Drechsler*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Chemische Uebungen: s. unter Naturwissenschaften S. 66.

Krankheiten der Hausthiere: s. Medicin S. 62 f.

## Literärgeschichte.

Literaturgeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur: Prof. *Schweiger*, 4 St.

Geschichte der Philosophie: vgl. Philosophie S. 63.

Geschichte der dramatischen Kunst bei Griechen und Römern: Prof. *von Leutsch*, 4 St., 10 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung seit Opitz: Assessor *Tittmann*, 5 St., 11 Uhr.

## Alterthumskunde.

Die griechische Götterlehre vortragen und Hesiod's Theogonie erklären wird Prof. *Wieseler*, 4 St., 8 Uhr, und (für die Zuhörer dieser Vorlesung unentgeltlich) die Götter- und Heroenbilder der K. Gypssammlung erläutern, ein oder zweimal wöch., Mittw. 5 Uhr und zu einer andern passenden Stunde.

Griechische Kunstgeschichte: Dr. *Matz*, 4 St., 10 Uhr.

Ueber Pompeii und Herculaneum: Dr. *Hirschfeld*, Mont. u. Donnerst., 8 Uhr.

Die Uebungen im K. archäologischen Seminar leitet Prof. *Wieseler* öffentlich wie bisher.

Die Abhandlungen der Mitglieder wird er privatisime beurtheilen, wie bisher.

## Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament s. unter Theologie S. 57.





Uhr; lässt griechische Elegiker Prof. v. *Lautsch*, Mittw. 9 Uhr, Lucretius Buch 2. Prof. *Sauppe*, Mittw. 2 Uhr, erklären, alles öffentlich.

## Deutsche Sprache.

Abriss der gotischen Grammatik und Erklärung des Ulfilas: Dr. *Wilken*, Mittw. u. Sonnab., 2 Uhr.

Historische Grammatik der deutschen Sprache: Prof. *Wilh. Müller*, 5 St., 3 Uhr.

Die Gedichte Walthers von der Vogelweide erklärt Prof. *Wilh. Müller*, Mont. Dienst. Donnerst. 10 Uhr.

Gregorius des Hartmann von Aue erklärt Dr. *Wilken*, 2 St., unentgeltlich.

Geschichte der deutschen Literatur: vgl. Literärgeschichte S. 68.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*.

## Neuere Sprachen.

Grammatik der englischen Sprache lehrt in Verbindung mit praktischen Uebungen Prof. *Theod. Müller*, Donnerst. Freit. u. Sonnab., 12 Uhr.

Ausgewählte provenzalische Dichtungen nach Bartsch's Chrestomathie erläutert *derselbe*, Mont. 9 Uhr, öffentlich.

Corneille's Cid erklärt in französischer Sprache *derselbe*, Dienst. u. Freit., 9 Uhr.

Französische Schreib- und Sprechübungen veranstaltet *derselbe*, Mont. Dienst. u. Mittw. 12 Uhr.

## Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ueber Kirchenbaukunst: Prof. *Unger*, Donnerst. 6 Uhr, öffentlich.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape*, und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

---

Geschichte der Musik: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen: Musikdirector *Hille* in passenden Stunden.

*Derselbe* ladet zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ein.

---

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitschule der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. Sonnab., Morgens von 7—11 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 4—5 Uhr.

---

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüne-  
klee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

## Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Das *zoologische* und *ethnographische Museum* ist Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *geognostisch-paläontologische Sammlung* ist Mittw. von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *Gemäldesammlung* ist Donnerstag von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 5—7 Uhr geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-*

*paläontologischen Sammlung, der chemischen Laboratorien, des archäologischen Museums, der Gemäldesammlung, der Bibliothek des k. philologischen Seminars, des diplomatischen Apparats; bestimmen besondere Reglements das Nähere.*

---

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

---



Kummer'sche Fläche ist. Im Folgenden will ich nun ein allgemeines Theorem aufstellen, betreffend eine Beziehung zwischen Linien-Complexen und Haupttangenten - Curven, unter welches sich die Bestimmung der Haupttangenten-Curven der Kummer'schen Fläche subsumirt.

Seien zunächst zwei Complexe und eine ihnen gemeinsame Gerade gegeben. In einer beliebig durch die letztere hindurchgelegten Ebene befinden sich zwei bez. den beiden Complexen angehörige Complex-Curven und diese berühren die gegebene Gerade je in einem Punkte. Man betrachte den einen Berührungspunkt als dem anderen entsprechend. Lässt man sich die angenommene Ebene um die gerade Linie drehen, so erhält man daraus ein lineares Entsprechen zwischen zwei auf der Geraden befindlichen Punktreihen. Die beiden Complexe sollen nun mit Bezug auf die gegebene gerade Linie in Involution heissen, wenn die Beziehung zwischen diesen Punktreihen die involutorische ist.

Analytisch drückt sich dies, wie ich hier ohne Beweis angebe, folgendermassen aus <sup>1)</sup>. Die Linien-Coordinationen  $x_1, \dots, x_6$  mögen so gewählt sein, dass die Summe ihrer Quadrate identisch verschwindet. Die beiden gegebenen Complexe seien  $A = 0$ ,  $B = 0$ ; sie liegen mit Bezug auf eine gemeinsame gerade Linie in Involution, wenn für diese Linie  $\sum \frac{dA}{dx_\alpha} \cdot \frac{dB}{dx_\alpha}$  verschwindet.

---

1) Hier und im Folgenden verweise ich auf die beiden Arbeiten: »Zur Theorie der Linien-Complexe ersten und zweiten Grades« und »die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinationen«, Math. Ann. t. II.



zweier Punkte und die Bedingung für die involutorische Lage zweier Complexe wie die Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen. Zu dieser Beziehung zwischen metrischer Geometrie und Linien-Geometrie, insbesondere auch zu der Aufstellung des hier in Rede stehenden Theorem's, bin ich durch weiteren Verfolg eines Gedankenganges gekommen, der Herrn Lie angehört. Herr Lie hat nämlich, wie dies beiläufig auch in der vorstehend citirten Arbeit: »Ueber die Haupttangenten-Curven u. s. w.« auseinandergesetzt ist, gefunden, dass zwischen der Geometrie eines linearen Complexes und der metrischen Geometrie bei drei Variabeln ein vollständiger Parallelismus Statt hat, der darauf zurückkommt, dass man die Linien eines linearen Complexes in der Art eindeutig auf die Punkte des Raumes beziehen kann, dass dabei der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis als fundamentales Gebilde auftritt<sup>1)</sup>. Dabei entsprechen sich, wie Herr Lie fand, die Krümmungs-Curven im metrischen Raume und die Haupttangenten-Curven im Raume des linearen Complexes in einer gewissen Weise.

Man kann sich nun die Frage vorlegen: Was bedeutet für den linearen Complex das auf den metrischen Raum bezügliche Dupin'sche Theorem? Die Antwort auf diese Frage ist eben der hier aufgestellte Satz, nur nicht in seiner allgemeinsten Form, sondern mit der Beschränkung, dass einer der vier Complexe, von denen in demselben die Rede ist, ein linearer ist. Es ist nicht schwer, von dieser besonderen Annahme zu dem

---

1) Herr Lie hat diese Beziehungen ausführlicher in einer demnächst in den Berichten der Akademie zu *Christiania* erscheinenden Abhandlung auseinandergesetzt.





die einzigen und dann unabhängigen Veränderlichen zu betrachten.

Seien unter dieser Voraussetzung  $A = 0$ ,  $B = 0$  die Gleichungen zweier Complexe, so ist die Bedingung dafür, dass dieselben mit Bezug auf eine gemeinsame Linie in Involution liegen,

$$(4) \frac{dA}{dx_1} \cdot \frac{dB}{dx_1} + \frac{dA}{dx_2} \cdot \frac{dB}{dx_2} + \frac{dA}{dx_3} \cdot \frac{dB}{dx_3} + \frac{dA}{dx_4} \cdot \frac{dB}{dx_4} = 0,$$

was der Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen im Raume von vier Dimensionen entspricht. Die Bedingung für die Involution ist nämlich ursprünglich:

$$\Sigma \frac{dA}{dx_\alpha} \cdot \frac{dB}{dx_\alpha} + \frac{dA}{dp} \cdot \frac{dB}{dq} + \frac{dA}{dq} \cdot \frac{dB}{dp} = 0,$$

da aber  $A$  und  $B$  nach Voraussetzung kein  $p$  mehr enthalten, so fallen die Glieder mit  $\frac{dA}{dp}$ ,  $\frac{dB}{dp}$  fort und man erhält die vorstehende Bedingung (4) <sup>1)</sup>.

Die Gleichungen der 4 gegebenen Complexe (1) erhalten nun die folgende Form:

$$(5) \quad 0 = \varphi_1 = 2x_1 + \Omega_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \dots, \\ \text{u. s. w.,}$$

wo  $\Omega$  eine homogene Function zweiten Grades der  $x$  ist und die nicht hingeschriebenen Glieder

1) Auf ähnliche Weise erhält man für das Moment zweier Geraden  $(x_1, x_2, x_3, x_4, p, q)$  und  $(y_1, y_2, y_3, y_4, p^1, q^1)$ , welches ursprünglich

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4) + p q^1 + p^1 q$$

ist, durch Einsetzung der Werthe für  $p$  und  $q$ :

$$= -\frac{1}{2}[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2].$$



ten Punkte die Fläche berührenden Tangenten müssen, auch wenn man auf Grössen erster Ordnung Rücksicht nimmt, eine Gerade gemein haben. Dies werde ich analytisch ausdrücken; in der Form der betreffenden Gleichung liegt dann unmittelbar der Beweis des aufgestellten Theorem's.

Beiläufig sei bemerkt, dass aus bekannten allgemeinen Eigenschaften der Strahlensysteme folgt, dass, wenn der Berührungspunkt  $\alpha$  auf einer Haupttangente der Brennfläche fortrückt, dieses auch mit dem zweiten Berührungspunkte der Brennfläche mit der Linie  $p$  der Fall ist.

Die Linie  $p$  hat bei unserer Coordinatenwahl die Coordinaten:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$p$	$q$
0	0	0	0	0	1

Für eine benachbarte Linie ist wegen (3)  $dp = 0$ ; sie hat also die Coordinaten:

$$dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3 \quad dx_4 \quad 0 \quad 1,$$

wo  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  völlig unabhängig sind. Soll die benachbarte Linie, wie hier vorausgesetzt, den Complexen  $\varphi_1, \varphi_2$  angehören, so ist  $dx_1$  und  $dx_2$  gleich Null. Die genannte Bedingung also: dass die beiden Tangentenbüschel eine Gerade gemein haben, wird eine Gleichung zwischen  $dx_3$  und  $dx_4$ . Der Beweis für das aufgestellte Theorem liegt nun darin, dass diese Gleichung die Form annimmt:

$$dx_3 \cdot dx_4 = 0,$$

wie jetzt gezeigt werden soll.

Zunächst, um auszudrücken, dass zwei Geradenbüschel eine Gerade gemein haben, wähle



Die aus den Coordinaten der aufgezählten vier geraden Linien gebildeten viergliedrigen Determinanten sollen verschwinden. Vereinigt man dieselben in ein rechtwinkliges Schema, so kann man dasselbe auf die folgende Form reduciren:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx_3 & dx_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_3 + ib_3)dx_3 & (a_4 + ib_4)dx_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Damit die aus diesem Schema gebildeten Determinanten sämtlich verschwinden, muss offenbar sein:

$$dx_3 \cdot dx_4 = 0,$$

womit der Beweis unseres Theorem's geführt ist.

Diese Gleichung sagt nämlich aus: damit der Berührungspunkt  $a$  und also auch der zweite Berührungspunkt von  $p$  mit der Brennfläche bei einer infinitesimalen Verschiebung von  $p$  auf einer Haupttangente der Brennfläche fortrücke, muss diese Verschiebung so geschehen, dass  $dx_3$  oder  $dx_4$  gleich Null ist, d. h. dass  $p$  in der benachbarten Lage nicht nur, wie selbstverständlich, den Complexen  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  sondern auch einem der beiden Complexe  $\varphi_3 = 0$  oder  $\varphi_4 = 0$  angehöre. Mit anderen Worten: die Linienfläche, welche  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  und  $\varphi_3 = 0$  oder  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  und  $\varphi_4 = 0$  gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der Congruenz  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$  in der Nähe von  $p$  nach der Richtung einer Haupttangenten-Curve, was das aufgestellte Theorem war.

---

Es mag jetzt ein System von unendlich vie-









## Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Januar, Februar und März 1871.

Nature. Nr. 57—61.

Sitzungsberichte der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. 1870. II. Heft 1. 2.

Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. August, September und October 1870.

Paul Niemeyer, Handbuch der theoretischen u. clinischen Percussion u. Auscultation, vom historischen u. critischen Standpuncte bearbeitet. Bd. II. Abth. 2. Erlangen 1871. 8.

Jahrbücher der königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt. Neue Folge. Heft VI. Erfurt 1870. 8.

Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. 1. Januar 1869—Ende Januar 1870. Prag 1870. 8.

Dritter Jahresbericht des akademischen Lesevereins an der k. k. Universität u. steierm. landsch. technischen Hochschule in Graz im Vereinsjahre 1870. Graz 1870. 8.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft herausg. v. A. Auwers u. A. Winnecke. Jahrg. V. Heft 4. October 1870. Leipzig 1870. 8.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 10. 1870.

C. Rammelsberg, die chemische Natur der Meteoriten. Berlin 1870. 4.

Verhandelingen der kon. Aademie van Wetenschappen. Afdeeling Letterkunde. Deel V. Amsterdam 1870. 4.



- Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich.  
Redigirt von Dr. R. Wolf. Jahrg. 14. Heft 1-4.  
Zürich 1869. 8.
- Dr. Ad. Dronke: Julius Plücker, Prof. der Mathematik u. Physik an der Rhein. Friedrich Wilhelms-Universität in Bonn. Bonn 1871. 8.
- Jacut's geographisches Wörterbuch, herausg. von F. Wüstenfeld. Bd. VI. Abth. 1. Leipzig 1870. 8.
- Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Dec. 1870. Berlin 1870. 8.
- Archivio per l'antropologia e la etnologia, pubblicato per la parte antropologica dal Dr. Paolo Mantegazza, per la parte etnologica dal Dr. F. Finzi. Vol. I. fasc. 1. Firenze 1871. 8.
- A. Preudhomme de Borre, considérations sur la classifications et la distribution géographique de la famille des Cicindélètes. 8.
- Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 12. 1870.
- Beleuchtung des von Prof. Max v. Pettenkofer über das Canalisations-Project zu Frankfurt a. M. den städtischen Behörden am 24. Sept. 1870 überreichten Gutachtens. Frankfurt a. M. 1871.
- Nature. Nr. 67. 69.
-



zur Aufnahme eines Fadenkreuzes oder Mikrometers geeignete Diaphragma im Ramsden'schen Ocular vor der ersten Linse, im Huyghens'schen dagegen hinter der ersten, d. h. zwischen beiden Linsen seinen Platz findet. Daran aber, dass im Huyghens'schen Ocular das Interstitium zwischen den beiden seinem Aequivalent zukommenden Hauptpunkten, wie sich nachher ergeben wird, negativ ist, hat wol Niemand bei jener Benennung gedacht.

Wie bekannt, wird das Huyghens'sche Ocular gewöhnlich aus zwei planconvexen Linsen aus gleicher Glassorte, meistens Crown Glas, zusammengesetzt, einer grösseren, dem sog. Collectiv oder Feldglas, und einer kleineren stärkeren, d. h. von kürzerer Brennweite, dem sog. Augenglas, beide mit der Convexseite dem eintretenden Licht zugekehrt\*). Die Entfernung zwischen beiden Linsen steht ihrer Grösse nach jedenfalls zwischen den beiden Brennweiten der Bestandtheile, so dass also der zweite (hintere) Brennpunkt der ersten Linse hinter die zweite Linse, der erste (vordere) Brennpunkt der zweiten Linse dagegen nicht vor die erste Linse, wie im Ramsden'schen Ocular, sondern zwischen beide Linsen fällt. Dieser letztere Punkt gibt zugleich den Platz des Diaphragmas sammt etwaigem Fadenkreuz oder Mikrometer, wenigstens in dem normalen Falle eines weitsichtigen, auf parallele Strahlen accommodirten Auges.

\*) Zuweilen wird die erste Linse für sich, andermale das ganze Ocular auch nach dem seiner Zeit berühmt gewesenen Optiker Campani zu Bologna benannt. Wie der Ausdruck „das Nicol“ und ähnliche bereits geläufig geworden, so dürfte sich die Bezeichnung „das Huyghens“, „das Ramsden“ für das gleichnamige Ocular, und (zumal mit einer Wortspiel-Prägnanz) „das Campani“ für die erste Linse des Huyghens'schen Oculars empfehlen.



zweiten Linse und des Aequivalents bzw. durch  $f, f', F$ , sowie die Interstitien oder Distanzen der beiden Hauptpunkte durch  $s, s', \eta$ . Ferner nennen wir für die erste Linse den ersten und zweiten Hauptpunkt  $E$  und  $E'$ , ersten und zweiten Brennpunkt  $U$  und  $U'$ , ebenso für die zweite Linse die Hauptpunkte  $J, J'$ , die Brennpunkte  $V, V'$ , und für das Aequivalent die Hauptpunkte  $H, H'$ , die Brennpunkte  $F, F'$ , sowie dessen Nebenseitenpunkte  $G, G'$ . Sodann bezeichnen wir die Entfernung  $E'J$  vom zweiten Hauptpunkt der ersten Linse bis zum ersten Hauptpunkt der zweiten Linse durch  $t$ , das Intervall  $EH$  vom ersten Hauptpunkt der ersten Linse bis zum ersten Hauptpunkt des Aequivalents durch  $\alpha$ , und das Intervall  $H'J'$  vom ersten Hauptpunkt des Aequivalents bis zum zweiten Hauptpunkt der zweiten Linse durch  $\alpha'$ . Hierbei sollen  $\alpha$  und  $\alpha'$  als positiv betrachtet werden, wenn im Sinne des durchgehenden Lichts  $H$  auf  $E$  folgt und  $H'$  dem  $J'$  vorausgeht, und die Interstitien als positiv gelten, wenn der zweite Hauptpunkt auf den ersten folgt. Bei positiven Brennweiten geht der erste Brennpunkt dem ersten Hauptpunkt voraus und folgt der zweite Brennpunkt auf den zweiten Hauptpunkt, wobei durchweg der erste Punkt jedes Paares von Cardinalpunkten auf das ein tretende, der zweite auf das austretende Licht bezogen wird. Für alle gegentheilige Fälle findet das Minuszeichen statt. Bei einer gewöhnlichen biconvexen Glaslinse, deren Dicke geringer als die Summe der beiden Krümmungsradien ist und wo  $f, s$  und die den Intervallen  $\alpha, \alpha'$  analogen, von den Scheitelpunkten  $A$  und  $A'$  der Linsenflächen bis zu den Hauptpunkten zu zählenden Entfernungen positiv sind, stehen also





$$\alpha + \alpha' + \eta = t + e$$

zusammenhängen.

Die Scheitelpunkte der ersten Linse durch  $A, A'$ , der zweiten durch  $B, B'$  bezeichnet, verstehen wir unter der Länge  $L$  des Oculars die Entfernung  $AB'$  zwischen den extremen Scheitelpunkten der Linsencombination, so dass, bei beiden Bestandtheilen die planconvexe Form in der vorhin erwähnten Stellung vorausgesetzt,  $L = t + \varepsilon + 3\varepsilon'$  wird, welcher Werth indess durch geringe concave oder convexe Krümmungen bei  $A'$  und  $B'$  nur um einen kleinen Bruchtheil eines Millimeters alterirt wird.

Nehmen wir vorerst auf die Dicke der Linsen keine Rücksicht und vernachlässigen also die in der Regel geringen Grössen  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ , setzen also  $e = 0$ , so zeigt die dritte der obigen Vorschriften, dass das Interstitium  $\eta$  des Aequivalents nur dann Null wird, wenn zugleich  $t = 0$  ist, d. h. wenn beide Linsen unmittelbar an einander liegen. Durch Trennung derselben nimmt  $\eta$  sofort einen negativen Werth an, welcher mit zunehmender Entfernung rasch wächst und für  $t = f + f'$  unendlich wird. Bei weiterer Vergrößerung von  $t$  wird und bleibt  $\eta$  positiv, nimmt vom Unendlichen bis zu einem Minimalwerthe  $4(f + f')$  ab, den es bei  $t = 2(f + f')$  erlangt, um von da mit  $t$  zugleich wiederum bis ins Unendliche zu wachsen. Da nun, wie bereits erwähnt, im Huyghens'schen Ocular  $f > t > f'$  und somit stets  $t > f + f'$ , so ist bei diesem Ocular für  $e = 0$  das Interstitium des Aequivalents stets negativ, so dass  $H$  nicht vor sondern hinter  $H'$  liegt.

Unter Berücksichtigung von  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ , wo also  $e$  nicht  $= 0$ , ist anfänglich, d. h. bei  $t = 0$ ,



$$\begin{aligned} s &= 0, & f &= 3, & t &= 2 \\ s' &= 0, & f' &= 1 \end{aligned}$$

woraus, da  $e = 0$  und  $\omega = 2$ , sich ergibt

$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 1, \quad \eta = -2, \quad F = \frac{3}{2}$$

und da  $L = 2$ , so wird  $\frac{F}{L} = \frac{3}{4}$  und  $-\frac{\eta}{F} = \frac{4}{3}$ .

Wäre in einem speciellen Falle (in Millim.)  
 $f = 60$ ,  $f' = 20$ ,  $t = 40$ , so würde man erhalten

$$\begin{aligned} \alpha &= 60 \\ \alpha' &= 20 \\ \eta &= -40 \\ F &= 30 \end{aligned}$$

und die Cardinalpunkte ständen in folgender Ordnung unter Beifügung ihrer von der Mitte der ersten Linse an gezählten Abscissen auf der Axe in Millimetern \*):

	$U$	....	-60	
$A$	$EE'$	....	0	$G$
	....	$V$	20	$H'$
	....	....	30	$F$
$B$	....	$JJ'$	40	
	....	....	50	$F'$
	$U'$	$V'$	60	$H$
	....	....	80	$G'$

Das in  $V$  anzubringende Diaphragma, genau in der Mitte des 40 Millim. langen Oculars, fällt hier also mit dem zweiten Hauptpunkt  $H'$  zusammen; der erste Hauptpunkt  $H$  liegt um die

\*) Wir geben dem Leser anheim, sich für diese Beispiele die Anordnung der Punkte auf der Axe durch eine Zeichnung zu veranschaulichen. Die Kenntniss der accessorischen oder Nebenpunkte  $G$ ,  $G'$  ist für constructive Anwendungen von Interesse.

halbe Ocularlänge hinter der Augenlinse. Das negative Interstitium ist von gleicher Länge wie das Ocular; die positive Brennweite beträgt 75 Procent dieser Länge.

2) Unter Beibehaltung derselben Linsen und ihrer Entfernung wie im vorigen einfachen Schema nehmen wir in einem zweiten Beispiel die Interstitien der Linsen mit in Rechnung und setzen als gegeben

$$\begin{array}{ll} \varepsilon = 1.2, f = 60, t = 40, \text{ also } \omega = 40 \\ \varepsilon' = 0.8, f' = 20 \qquad \qquad \text{und } e = 2.0 \end{array}$$

Hieraus finden wir

$\alpha = 60$		$U$	....	-60.0	
$\alpha' = 20$	$A$	$E$	....	0	$G$
$\eta = -38$		$E'$	....	1.2	
$F = 30$		....	$V$	21.2	
		....	....	22.0	$H'$
		....	....	30.0	$F$
		....	$J$	41.2	
		....	$J'$	42.0	
	$B'$	....	....	43.6	
		....	....	52.0	$F'$
		....	....	60.0	$H$
		$U'$	....	61.2	
		....	$V'$	62.0	
		....	....	82.0	$G'$

Die Länge  $L$  des Oculars wird 43.6 und  $\frac{F}{L} = 0.6881$ , sowie  $\frac{\eta}{F} = 1.267$ , und der zweite Hauptpunkt  $H'$  liegt 0.8 Mill. hinter dem in  $V$  anzubringenden Diaphragma.

3) Es sei gegeben

$$\begin{array}{llll} \varepsilon = 1.3, & f = 48, & t = 33, & \text{also } \omega = 35 \\ \varepsilon' = 0.7, & f' = 20 & & \text{und } e = 2.0 \end{array}$$

woraus man erhält

$\alpha = 45.26$		$U$	.....	—48.00	
$\alpha' = 18.85$			.....	— 9.60	$G$
$\eta = -29.11$	$A$	$E$	.....	0	
$F = 27.43$		$E'$	.....	1.30	
			.....	14.30	
			.....	16.15	$H$
			.....	17.83	$F$
			.....	34.30	
			.....	35.00	
	$B$		.....	36.40	
			.....	43.58	$F$
			.....	45.26	$H$
		$U$	.....	49.30	
			.....	55.00	
			.....	71.01	$G'$

Die Länge ist 36,40, also  $\frac{F}{L} = 0.7536$ , sowie  $-\frac{\eta}{F} = 1.061$ . Der zweite Hauptpunkt liegt 1.85 Mill. hinter dem Diaphragma  $V$ .

4) Gegeben sei

$$\begin{array}{llll} \varepsilon = 1.4, & f = 60, & t = 40, & \text{also } \omega = 44 \\ \varepsilon' = 0.8, & f' = 24 & & \text{und } e = 2.2 \end{array}$$

Man findet hieraus für das Aequivalent die vier Bestimmungsstücke sowie für die Aufeinanderfolge der Cardinalpunkte der Bestandtheile sowohl als des Aequivalents die Abscissen wie folgt



der sofort, wenn man die Unterscheidung zwischen dem ersten und dem zweiten Punkte jedes der beiden Paare beachtet. Sei  $P$  der Punkt, in welchem  $H'$  und  $F$ ,  $Q$  der Punkt, wo  $H$  und  $F'$  coincidiren, so ist die dioptrische Bedeutung von  $P$ , dass wenn einfallende Lichtstrahlen nach  $P$  convergiren, die austretenden Strahlen parallel zur Axe verlaufen, und die Bedeutung von  $Q$ , dass parallel zur Axe einfallendes Licht nach dem Austritt aus Strahlen besteht, deren Concurrirungspunkt in  $Q$  liegt. Hierin besteht die Function beider Punkte in ihrer Eigenschaft als Brennpunkte  $F$  und  $F'$ . Die zweite Rolle, welche  $P$  und  $Q$  als Hauptpunkte  $H'$  und  $H$  spielen, besteht darin, dass einfallendes in  $Q$  concurrirendes Licht nach dem Durchgang in  $P$  concurrirt. Es leuchtet ein, dass diese Coincidenz zwischen Haupt- und Brennpunkten nur bei entgegengesetztem Zeichen von Brennweite und Interstitium stattfinden kann.

Die Realisirung dieser Coincidenz beruht auf der Forderung, dass  $F' = -\eta$  werde oder dass

$$\frac{tt}{\omega} - e = \frac{ff'}{\omega}$$

sei, welche für  $t$  den fraglichen Werth ergibt. Derselbe findet sich

$$\sqrt{\left[ ff' + e(f + f') + \frac{ee'}{4} \right]} - \frac{e}{2}$$

Es mögen noch zwei Beispiele folgen, in welchen wir der Entfernung  $t$  diesen berechneten Werth ertheilen.

5) Es sei gegeben

$$s = 1.5, f = 64, t = 41.46 \quad \text{also } \omega = 47.54$$

$$s' = 1.0, f' = 25$$

$$\text{und } e = 2.50$$

dann finden wir

$$\begin{aligned} \alpha &= 55.82 \\ \alpha' &= 21.80 \\ \eta &= -33.66 \\ F &= 33.66 \end{aligned}$$

<i>A</i>	<i>U</i>	....	-64.00	<i>G</i>
	....	....	-11.50	
	<i>E</i>	....	0	
	<i>E'</i>	....	1.50	
<i>B'</i>	....	<i>V</i>	17.96	<i>FH'</i>
	....	....	22.16	
	....	<i>J</i>	42.96	
	....	<i>J'</i>	43.96	
	....	....	45.96	<i>HF'</i>
	....	....	55.82	
	<i>U'</i>	....	65.50	
	....	<i>V'</i>	68.96	
	....	....	89.48	<i>G'</i>

Die Länge wird 45.96,  $\frac{F}{L} = 0.7324$  und, wie verlangt,  $-\frac{\eta}{F} = 1$ . Zweiter Hauptpunkt und erster Brennpunkt liegen 4.2 Mill. hinter dem Diaphragma.

6) Es sei

$$\begin{aligned} s &= 1.3, \quad f = 72, \quad t = 47.63, \quad \text{also } \omega = 54.37 \\ s' &= 0.7, \quad f' = 30, \quad e = 2.0 \end{aligned}$$

woraus wir finden

$$\begin{aligned} \alpha &= 63.08 \\ \alpha' &= 26.28 \\ \eta &= -39.73 \\ F &= 39.73 \end{aligned}$$

<i>A</i>	<i>U</i>	....	-72.00	<i>G</i>
	....	....	-16.38	
	<i>E</i>	....	0	
	<i>E'</i>	....	1.30	
<i>B'</i>	....	<i>V</i>	18.93	<i>FH'</i>
	....	....	23.35	
	....	<i>J</i>	48.93	
	....	<i>J'</i>	49.63	
	....	....	51.03	<i>HF'</i>
	....	....	63.08	
	<i>U'</i>	....	73.30	
	....	<i>V'</i>	79.63	
	....	....	102.81	<i>G'</i>



Für die Länge 51.03 ist  $\frac{F}{L} = 0.7785$ , Zwei-

ter Haupt- und erster Brennpunkt stehen 4.42 mm hinter der Blende.

Für leichteren Vergleichung stellen wir die aufgeführten Beispielen dem Huyghens'schen Ocular ertheilten Formen nochmals numerisch zusammen. Aus der letzten Columne entnehmen wir die für einen schnellen Ueberschlag folgende Regel: die äquivalente Brennweite eines Huyghens'schen Oculars ist ziemlich zureichend drei Viertel seiner Länge, gemessen zwischen den extremen Glasflächen.

$s$	$s'$	$f$	$f'$	$t$	$\alpha$	$\alpha'$	$-\eta$	$F$	$F:L$
0	0	60	20	40	60	20	40	30	0.75
1.2	0.8	60	20	40	60	20	38	30	0.688
1.3	0.7	48	20	33	45.26	18.85	29.11	27.43	0.754
1.4	0.8	60	24	40	54.55	21.82	36.36	32.73	0.747
1.5	1.0	64	25	41.46	55.82	21.80	33.66	33.66	0.732
1.3	0.7	72	30	47.63	63.08	26.28	39.73	39.73	0.779

Diesen schematischen Beispielen soll nun eine Reihe von Messungen an Ocularen theils von Fernröhren theils von Mikroskopen namhafter früherer und jetziger Künstler folgen, welche nebst Bemerkungen über die Methode der Bestimmung sowie über die numerischen Ergebnisse den Gegenstand einer Fortsetzung gegenwärtiger Mittheilung bilden werden.

---





That zwei Classen von Formen mit verschiedenen Invarianteneigenschaften.

Es sei  $f = a_x^6$  eine Form 6. Ordnung; ich führe die Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} H &= (ab)^2 a_x^4 b_x^4, & T &= (aH)a_x^5 H_x^7, \\ i &= (ab)^4 a_x^2 b_x^2, & A &= (ab)^6, \\ l &= (ai)^4 a_x^2, & m &= (il)^2 i_x^2, \\ n &= (im)^2 i_x^2, & \mathfrak{J} &= (nl)n_x l_x, \\ B &= (ii')^4, & C &= (ii')^2(ii'')^2(i'i'')^2, \\ R &= (lm)(ln)(mn). \end{aligned}$$

Aus den Untersuchungen über den algebraischen Character der gedachten Modulargleichung, welche Hr. Gordan in Bd. II. Ser. II. der *Annali di matematica* gegeben hat, entnimmt man dann sofort den Satz:

Wenn  $A$  und  $C$  verschwinden, so bestimme man  $k = u^4$  aus der Gleichung 4. Grades

$$\frac{1 - 6k^2 + k^4}{k(1 - k^2)} = \frac{12R}{B^2\sqrt{-BD}};$$

mittelst der Substitution

$$\frac{v + u^5}{vu^4 - u} = \frac{2\mathfrak{J}}{l\sqrt{-BD}}$$

welche hier, indem  $\mathfrak{J}$  und  $l$  einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, eine lineare wird, geht  $f = 0$  in die Modulargleichung

$$v^6 - 4u^5v^5 + 5u^2v^4 - 5u^4v^2 + 4uv - u^6 = 0$$

über.

In Gleichung für den Multiplikator  $M$  der Transformation hat in Bd. I. Ser. I. der Ann. d. Matematica Hr. Brioschi in einer Form angegeben, welche, wenn man

$$z = \frac{1 - M}{M}$$

einsetzt, diese wird:

$$z^6 - 4z^5 + 256k^2k'^2(z + 1) = 0.$$

Diese Gleichung hat die charakteristischen Invariantenrelationen

$$B = \frac{7}{50} A^2, \quad C = -\frac{9}{500} A^3.$$

Bestehen diese für irgend eine Form  $f$ , so wird dieselbe in folgender Weise auf die Form zurückgeführt: Man setze

$$\alpha = \frac{A}{10}, \quad \gamma = \frac{R}{4(D - \frac{A^5}{3 \cdot 5^5})},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{A^5}{3 \cdot 10^5} - \frac{D}{82}}.$$

Durch die in den Formeln

$$\gamma \xi^2 = \alpha \frac{l}{4} + \frac{\gamma - \beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + \alpha m - 2\alpha^2 l}{8\beta}$$

$$\gamma \eta^2 = \alpha \frac{l}{4} + \frac{\gamma + \beta}{2\alpha} \cdot \frac{n + \alpha m - 2\alpha^2 l}{8\beta}$$

$$-8\beta \xi \eta = m - \alpha l$$

enthaltene lineare Substitution geht dann  $f = 0$  in die Gleichung



$$\sqrt[3]{T + \frac{f^2}{6} \sqrt{-A}} - \varepsilon \sqrt[3]{T - \frac{f^2}{6} \sqrt{-A}}$$

darstellen, in welchen  $\varepsilon$  eine dritte Wurzel der Einheit bedeutet, und die Lösung von  $f = 0$  ist hiedurch ganz in derselben Weise auf die Lösung quadratischer Gleichungen reducirt, in welcher nach Hrn. Cayley die Zerfällung der cubischen und biquadratischen Formen vorgenommen werden kann.

---

## Das Verhalten der Phosphorsäure im Erdboden.

Versuche von Dr. P. Wagner,  
Assist. am agriculturchemischen Laboratorium.

Mitgetheilt von Wilh. Wicke.

Zu wissen, in welcher Form die Pflanzennährstoffe im Boden vorkommen, und wie sich ihre Verbindungen gegen Lösungsmittel verhalten, hat ein chemisch-physiologisches und auch praktisches Interesse. Während über die hierher gehörigen basischen Oxyde mehrere gediegene Arbeiten vorliegen, hat man sich mit den betreffenden Säuren viel weniger beschäftigt. Es ist namentlich auffallend, dass die Phosphorsäure, die doch unter den Pflanzennährstoffen eine so wichtige Rolle spielt, nicht häufiger bearbeitet worden ist. Wir besitzen nur eine in der angeführten Richtung unternommene grössere Untersuchung von Dr. E. Peters aus dem Jahre 1867, die, so sorgfältig sie ausgeführt worden ist, doch





Menge Phosphorsäure, nur noch wenig phosphorsauren Kalk.

Dr. Wagner hatte sich nun die Aufgabe gestellt, die von Peters in Anwendung gebrachte Untersuchungs-Methode einer genauen Prüfung zu unterziehen. Er wollte sich insbesondere Gewissheit darüber verschaffen, ob die aus dem Verhalten des Bodens gegen gedachte Lösungsmittel gezogenen Schlussfolgerungen, als sicher begründet angesehen werden könnten. Möglich erschien namentlich der Fall, dass zwischen dem ursprünglich gegebenen phosphorsauren Salze und dem übrigen Bodenmaterial, in Folge der chemischen Behandlung, wechselseitige Umsetzungen stattgefunden. Das schliessliche Ergebniss der Untersuchung konnte recht wohl erst während der dreitägigen Behandlung des Bodens entstanden und somit ein Produkt der analytischen Behandlung sein.

Zunächst stellte Wagner die Löslichkeit des durch Fällung einer Chlorcalcium-Lösung mit phosphorsaurem Natron erhaltenen phosphorsauren Kalks fest.

150 Grm. des feuchten Niederschlages, entsprechend 15 Grm. trockner Substanz, wurden in 2 Liter destillirtem Wasser vertheilt und eine halbe Stunde lang ein ununterbrochener Strom Kohlensäure hindurchgeleitet. Diese Behandlung wurde am 2. und 3. Tage wiederholt. Das Gefäss wurde nach jedesmaligem Einleiten fest verschlossen. Nach 6 Tagen wurde die gelöste Phosphorsäure bestimmt. Sie betrug im Liter 0.352 Grm.

## I.

Andere 150 Grm. des Niederschlages wurden, nachdem sie vorher mit 15 Grm. reinem präci-



wird relativ weniger phosphorsaurer Kalk zersetzt werden.

Der abgeänderte zweite Versuch zeigt auch, dass aus einem zersetzten Kalkphosphat durch kohlensauren Kalk wiederum die frei gewordene Phosphorsäure absorbiert werden kann.

## II.

Von der nach I. erhaltenen kohlensauren Lösung von phosphorsaurem Kalk wurden 1000 CC. mit 30 Grm. frisch gefällten Eisenoxydhydrats versetzt. Letzteres betrug in wasserfreiem Zustande 2 Grm. Da das Eisenoxyd eine grosse Menge Kohlensäure absorbierte, so wurde diese durch Einleiten wieder ersetzt. Im Uebrigen wurde von dem bei I. beobachteten Verfahren nicht abgewichen. Mit dem durch das Eisenoxydhydrat hinzugebrachten Wasser enthielt jetzt der Liter 0.345 Grm. Phosphorsäure.

Die Phosphorsäure im Filtrat betrug

nach 2 Tagen	0.080	Grm.	im	Liter
„ 6	0.040	„	„	„
„ 22	0.028	„	„	„
„ 37	0.021	„	„	„

Der Versuch wurde in der Art modificirt, dass ein Mal getrocknetes feingeriebenes und ein anderes Mal gefrorenes Eisenoxydhydrat zugesetzt wurde. In den ersten Tagen geschah die Absorption der Phosphorsäure langsamer, nach Verlauf von 37 Tagen war indess in beiden Fällen nur noch 0.026 Grm. im Liter gelöst.

Wir haben durch diesen Versuch den direkten Beweis, dass das phosphorsaure Eisenoxyd erst aus dem phosphorsauren Kalk entstanden.



**Wirkung gewisser Salze auf phosphorsauren Kalk festgestellt.**

1600 CC. einer Lösung von  
 10 Grm. schwefelsaurer Magnesia  
 4 „ Salmiak  
 6 „ salpetersaurem Kali

blieben mit 150 Grm. feuchtem phosphorsauren Kalk (s. Versuch I.) 14 Tage stehen.

Die Bestimmung der nach dieser Zeit gelösten Phosphorsäure ergab: 0.265 Grm. im Liter.

500 CC. des Filtrats wurden mit 10 Grm. gefällttem kohlensauren Kalk versetzt.

500 CC. mit 15 Grm. feuchtem Eisenoxydhydrat.

Die nach 10 Tagen angestellte Untersuchung der Lösung ergab in beiden Fällen nur noch Spuren von Phosphorsäure.

Man sieht aus diesem Versuch, dass aus dem phosphorsauren Kalk durch neutrale Salze Phosphorsäure in Lösung gebracht wird, dass aus der letztern aber durch kohlensauren Kalk die Phosphorsäure fast vollständig wieder ausgeschieden wird. Der erste wie der zweite Process hat für das Verhalten der Phosphorsäure im Boden um deswillen Werth, weil die oben erwähnten Salze Düngmittel sind und der kohlensäure Kalk ein allgemein verbreiteter Bestandtheil der Ackererde ist.

Es ergibt sich aus den mitgetheilten Versuchen für die Aufgabe, welche sich Dr. Peters gestellt hatte, dass dieselbe zur Zeit noch nicht gelöst werden kann, weil es uns bisjetzt noch an Untersuchungsmethoden fehlt, mit deren Hülfe wir die verschiedenen im Boden vorkommenden



Die in den Filtraten gefundene  
Menge Phosphorsäure auf 1000 Grm.  
Erde berechnet:

Dauer der Einwirkung.	Kohlensaures Wasser.	Essigsäure.
1 $\frac{1}{2}$ Stunde	— — —	0.524 Grm.
3 „	0.0821 Grm.	— — —
24 „	0.0814 „	0.443 „
3 Tage	— — —	0.361 „
4 „	0.0650 „	— — —
21 „	— — —	0.340 „

Dadurch ist bewiesen, dass auf die gelöst gewesene Phosphorsäure andere Bodenbestandtheile absorbirend gewirkt haben. Würde jetzt als letztes Lösungsmittel Salzsäure angewendet, so würde die absorbirte Phosphorsäure dem vorhandenen Eisenoxyd und der Thonerde zu Gute kommen.

Die Untersuchungen über das Verhalten der Phosphorsäure im Boden erfordern, dass namentlich auch über die Zersetzung des phosphorsauren Eisenoxyds und Oxyduls Versuche angestellt werden. Diese Verbindungen kommen erfahrungsmässig in verschiedenen Culturböden häufig genug vor. Das phosphorsaure Eisenoxyd-Oxydul (Blaueisenerde) unter andern sehr häufig in den tieferen Schichten des Marschbodens und im Moorboden. In beiden Fällen dürfte es durch die Wirkung organischer, reducirend wirkender Substanzen aus dem phosphorsauren Eisenoxyd entstanden sein.

Zu wissen, welche Agentien die Verbindungen der Eisenoxyde mit Phosphorsäure zersetzen und die Phosphorsäure für die Vegetation nutzbar





## Malden-Phosphorit (sog. Malden-Guano).

Von

Wilhelm Wicke.

Est ist die im stillen Ocean gelegene Malden-Insel, von welcher dieser Phosphorit bezogen wird. Er ist erst in der letzten Zeit durch das bekannte Handlungshaus Emil Güssefeld in Hamburg der deutschen Landwirthschaft zugänglich gemacht. Der Import hat im vorigen Jahre mit zwei Ladungen begonnen, wird aber für die folgenden Jahre mit grösseren Quantitäten fortgesetzt werden. Durch Aufschliessen mit Schwefelsäure wird daraus ein Superphosphat mit 16 Proc. löslicher Phosphorsäure erhalten.

Der Malden-Phosphorit hat grosse Aehnlichkeit mit dem schon länger bekannten und zur Superphosphat-Fabrikation benutzten sog. Baker-Guano. Auch lässt das ganz gleiche Vorkommen beider Phosphorite auf gleiche Entstehungsweise schliessen. Es ist, was diese anbetrifft, sehr wahrscheinlich, dass das ursprüngliche Material Guano-Lager gewesen sind. Der Guano ist durch Witterungseinflüsse seiner in Wasser löslichen Substanzen fast gänzlich verlustig gegangen, so dass hauptsächlich nur phosphorsaurer und kohlensaurer Kalk zurückgeblieben ist. Eine ganz bedeutende Verminderung haben ferner auch die organischen Substanzen und besonders die stickstoffhaltigen erfahren, so dass der

gesamnte Stickstoffgehalt nur noch 0.5 Proc. beträgt.

Da eine Analyse des Malden-Phosphorit bisher noch nicht bekannt gemacht ist, so theile ich eine solche, die vom Herrn Frhr. Grote in meinem Laboratorium ausgeführt ist, hier mit.

Wasser . . . . .	4.44	Proc.
Organische Substanzen .	9.23	„
Kalk . . . . .	41.90	„
Magnesia . . . . .	0.84	„
Kali . . . . .	0.20	„
Natron . . . . .	1.13	„
Eisenoxyd . . . . .	1.70	„
Phosphorsäure . . . . .	32.90	„
Kohlensäure . . . . .	6.46	„
Schwefelsäure . . . . .	0.30	„
Fluor, Chlor . . . . .	0.90	„
	<u>100.00</u>	

Preisaufgaben  
der  
**Wedekindschen Preisstiftung**  
für Deutsche Geschichte.

---

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hiermit wiederholt die Aufgaben bekannt, welche für den dritten Verwaltungszeitraum, d. h. für die Zeit vom 14. März 1866 bis zum 14. März 1876, von ihm ingemäss der Ordnungen der Stiftung gestellt worden sind.

Für den ersten Preis.

Der Verwaltungsrath verlangt

**eine Ausgabe der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik des Hermann Korner.**

Für den letzten Verwaltungszeitraum war eine Ausgabe der verschiedenen Texte und Bearbeitungen der Chronik des Hermann Korner verlangt und dabei sowohl an die handschriftlich vorhandenen deutschen wie die lateinischen Texte gedacht. Seit dem ersten Ausschreiben dieser Preisaufgabe hat sich aber die Kenntniss des zu benutzenden Materials in überraschender Weise vermehrt: zu der von der bisherigen Ausgabe der Chronica novella stark abweichenden Wolfenbütteler Handschrift sind zwei andere in Danzig und Linköping gekommen, die jenes Werk in wieder anderer Gestalt darbieten



vorhandenen Handschriften, namentlich der Lübecker und Lüneburger.

Es wird bemerkt, dass von dem Wolfenbütteler, Danziger und Linköpinger Codex sich genaue Abschriften auf der Göttinger Universitätsbibliothek befinden, die von den Bearbeitern werden benutzt werden können, jedoch so dass wenigstens bei der Wolfenbütteler Handschrift auch auf das Original selbst zurückzugehen ist.

In allen Theilen ist besonders auf die von Korner benutzten Quellen Rücksicht zu nehmen, ein genauer Nachweis derselben und der von dem Verfasser vorgenommenen Veränderungen sowohl in der Bezeichnung derselben wie in den Auszügen selbst zu geben. Den Abschnitten von selbständigem Werth sind die nöthigen erläuternden Bemerkungen und ein Hinweis auf andere Darstellungen, namentlich in den verschiedenen Lübecker Chroniken, beizufügen.

Eine Einleitung hat sich näher über die Person des Korner, seine Leistungen als Historiker, seine eigenthümliche Art der Benutzung und Anführung älterer Quellen, den Werth der ihm selbständig angehörigen Nachrichten, sodann über die verschiedenen Bearbeitungen der Chronik, die Handschriften und die bei der Ausgabe befolgten Grundsätze zu verbreiten.

Ein Glossar wird die ungewöhnlichen, dem Verfasser oder seiner Zeit eigenthümlichen Ausdrücke zusammenstellen und erläutern, ein Sachregister später beim Druck hinzuzufügen sein.

### Für den zweiten Preis.

Wie viel auch in älterer und neuerer Zeit für die Geschichte der Welfen und namentlich des mächtigsten und bedeutendsten aus dem









bewerben, müssen alle äussern Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiss sein kann, das seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohl thun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Aussenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres vor dem 14. März, mit welchem das zehnte beginnt (also diesmal bis zum 14. März 1875), dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

**5. Ueber Zulässigkeit zur Preissbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich, wie jeder Andere, um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

**6. Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vortragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der



Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß d. h. wenn derselbe die Druckkosten um Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrats erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Ausgaben erforderlich, so wird sie den Verfasser oder falls derselbe nicht mehr leben sollte, anderen dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

**A. Bemerkung auf dem Titel derselben.** Von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekind'schen Preise gekrönt und herausgegeben

**10 Freiemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgibt, erhält der Verfasser je 10 Freiemplare.

Göttingen, den 14. März 1871.



Flächen 2ter Ordnung des linearen Systems einen Fundamental-Kegelschnitt und einen, nicht auf dem Kegelschnitte gelegenen, Fundamental-Punct haben; und der Fall  $n = 3$ , wenn eine Fundamental-Raumcurve sechster Ordnung vorhanden ist. Der erste Fall stimmt mit der Methode der reciproken Radien überein; der zweite führt zur bekannten Abbildung einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf einer Ebene. Für diese letzte Transformation hat man nur vorausgesetzt, dass die Fund.-Curve nicht in Theile, oder sofort in zwei zusammenfallende Raumcurven dritter Ordnung oder in sechs Gerade zerfalle <sup>1)</sup>. Fügen wir diesem noch hinzu, dass Herr Cayley <sup>2)</sup> eine besondere merkwürdige Transformation gefunden hat, wobei den Ebenen des ersten Raumes ein System von windschiefen cubischen Flächen entspricht, welche die doppelte Gerade und drei Erzeugende gemein haben, indem die den Ebenen des zweiten Raumes entsprechenden Flächen nur zweiter Ordnung sind und in einer Geraden und drei festen Puncten sich durchschneiden.

Schon die Transformation zweiten Grades bietet einen Fall dar, welcher, so weit mir bekannt, unbemerkt geblieben ist: nämlich den Fall, dass der Fund.-Punct auf dem Fund.-Kegelschnitte liegt. Dann entsprechen den Ebenen jedes Raumes Flächen zweiter Ordnung, welche durch einen festen Kegelschnitt gehen und in einem Puncte dieser Curve eine feste Ebene berühren. Wenn man diese Transformation auf

1) Geiser, Borchardts Journal B. 69., Sturm, ebenda B. 70.

2) On the rational Transformation between two spaces (Proceedings of the London Mathematical Society, v. III, 1870, p. 171).



tig abbildbaren Fläche  $F'$ , deren Ordnung der Anzahl der Punkte gleich ist, in denen eine beliebige von  $K$  achtmal geschnittene cubische Raumcurve der Fläche  $F$  ausserhalb  $K$  noch begegnet. Eine Curve, welche ein Bestandtheil von  $K'$  ist, wird so oft von  $F'$  enthalten, als eine beliebige Erzeugende des entsprechenden Bestandtheils von  $k$  und die Fläche  $F$  nicht auf  $K$  gelegene Punkte gemein haben. Nach dieser Methode, ergeben sich auch Flächen mit Rückkehrcurven; denn man braucht nur eine Fläche  $F$  anzunehmen, welche in einen Theil von  $k$  eingeschrieben ist.

*Erstes Beispiel.* —  $K$  besteht aus einer Geraden  $C_1$  und einer Raumcurve  $C_5$  fünfter Ordnung vom Geschlechte 1, welche  $C_1$  in drei Punkten schneidet. Dann zerfällt  $K'$  in eine Curve  $C_4'$  vierter Ordnung und erster Species, und in einen Kegelschnitt  $C_2'$ , der sich auf  $C_4'$  in drei Punkten stützt. Betrachtet man nun eine Fläche  $F_2$  zweiter Ordnung, die durch  $C_1$  geht, so wird ihr im andern Raume eine Fläche  $F_5'$  fünfter Ordnung entsprechen, die  $C_4'$  als Doppelcurve besitzt und  $C_2'$  einfach enthält. Hieraus entspringt die ganze Theorie dieser letztern Fläche, welche Herr Clebsch zuerst dargelegt hat<sup>1)</sup>. Die 7 Punkte  $a$ , in denen  $C_5'$  der Fläche  $F_2$  ausserhalb  $C_1$  noch begegnet, und die 7 Geraden von  $F_2$ , welche von  $C_1$  und  $C_5$  geschnitten werden, bilden sich auf  $F_5'$  als Gerade ab; und man hat somit die 7 Paare von Geraden dieser Fläche. Das System der Erzeugenden von  $F_2$ , welche  $C_1$  treffen, entspricht der Schaar von Kegelschnitten, die entstehen, wenn man  $F_5'$  mit dem Büschel zweiter Ordnung schneidet, dessen Grundcurve  $C_4'$  ist. Die 7 Punkte  $a$  werden von

1) Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Bd. 15.





schneiden, und die 3 Kegelschnitte von  $F_3'$ , welche durch je einen Punct  $a$  gehen und mit  $C_4'$  auf je einer Fläche 2ten Grades liegen, sind die Bilder der 16 Geraden von  $F_4$ . Der Doppelgeraden entspricht die Durchschnittscurve von  $F_3'$  mit der Ebene von  $C_2'$ ; und den ebenen Schnitten von  $F_4$  entsprechen Raumcurven 5ter Ordnung (vom Geschlechte 2), welche von den durch  $C_4'$  und die Puncte  $a$  gehenden cubischen Flächen ausgeschnitten werden. Bildet man demnach  $F_3'$  auf einer Ebene so ab, dass fünf Gerade  $b$  durch fünf Fund.-Puncte 1, 2, 3, 4, 5 dargestellt werden, so wird sich sofort die niedrigste Abbildung von  $F_4'$  ergeben. Ist, in der Darstellung von  $F_3'$ , 0 der sechste Fund.-Punct, und 6, 7, 8 die Bilder der Puncte  $a$ , so werden die ebenen Schnitte von  $F_4$  durch Curven 4ter Ordnung,  $0^2.1.2.3.4.5.6.7.8$ , abgebildet <sup>1)</sup>.

Benutzt man dieselbe Transformation, um eine durch den Kegelschnitt  $C_2'$  gehende cubische Fläche  $F_3'$  umzugestalten, so wird sich eine Fläche  $F_6$  6ter Ordnung ergeben, welche die Doppelcurve  $C_3$  (vom Geschlechte 1) besitzt. Auf dieser Fläche liegen 10 Gerade, welche die Doppelcurve dreimal treffen; und 16 Kegelschnitte, welche sich auf  $C_3$  in fünf Puncten stützen. Um zur niedrigsten ebenen Abbildung von  $F_6$  zu gelangen, reicht es hin die Fläche  $F_3'$  so abzubilden, dass ein Fund.-Punct der Geraden entspricht, die mit  $C_2'$  zu einem ebenen Gesamtschnitte von  $F_3'$  ergänzt: dann werden die ebenen Schnitte von  $F_6$  durch Curven 6ter Ordnung dargestellt, welche 5 zweifache und 10 einfache feste Puncte haben. Das Bild der Doppelcurve wird eine Curve 15ter Ordnung mit 5 fünffachen und 10 dreifachen Puncten sein.

1) Mathematische Annalen, Bd. 1, S. 261.



den 8 Punkten, in welchen  $C_5$  der Fläche  $F_3$  ausserhalb  $C_1$  noch begegnet, und den 8 Geraden von  $F_3$ , die durch diese Punkte und durch  $C_1$  gehen.

Unterwirft man dieser Transformation eine cubische windschiefe Fläche  $F_3$ , deren Doppelgerade  $C_1$  sei, so werden wir eine Fläche  $F_5'$  5ter Ordnung mit der dreifachen Geraden  $C_1'$  finden. Die 11 Punkte, in denen  $F_3$  von  $C_5$  ausserhalb  $C_1$  noch getroffen wird, und die aus diesen Punkten ausgehenden Erzeugenden von  $F_3$  liefern sofort die 11 Paare von Geraden  $a, b$ , die auf  $F_5'$  existiren. Der dreifachen Geraden  $C_1'$  wird die Durchschnittscurve von  $F_3$  mit der Fläche 2ten Grades entsprechen, welche der Ort der die Curve  $C_5'$  dreimal schneidenden Geraden ist <sup>1)</sup>.

Mittelst derselben Transformation, führt eine allgemeine, durch  $C_1$  gelegte, cubische Fläche  $F_3$  zu einer Fläche  $F_7$  7ter Ordnung mit der dreifachen Geraden  $C_1'$  und der Doppelcurve  $C_5'$ . Diese Fläche enthält 13 Gerade, die von  $C_1'$  geschnittene Sehnen von  $C_5'$  sind. Richtet man die ebene Abbildung von  $F_3$  so ein, dass die Gerade  $C_1$  von einem Kegelschnitte dargestellt wird, so ergibt sich die niedrigste Abbildung von  $F_7'$ , wobei den ebenen Schnitten dieser Fläche Curven 7ter Ordnung mit einem dreifachen (1), fünfzweifachen (2, 3, 4, 5, 6) und dreizehn einfachen (7, 8, ... 19) festen Punkten entsprechen. Die dreifache Gerade wird durch eine Curve 6ter Ordnung  $1^2. 2^2 \dots 6^2. 7. 8 \dots 19$ , und die Doppelcurve durch eine Curve 12ter Ordnung  $1^6. 2^3. 3^3. \dots 6^3. 7^2. 8^2 \dots 19^2$  dargestellt.

*Drittes Beispiel.* —  $K$  besteht aus zwei cubischen Raumcurven  $C_3, K_3$ , die vier gemeinsame Punkte haben: dann ist auch  $K'$  ein ähnliches

1) Math. Annalen, Bd. 3, S. 185.



raden von  $F_3$ , die  $A$  und  $B$  schneiden. Den zwei Doppelgeraden von  $F_5'$  entsprechen zwei Raumcurven 5ter Ordnung (vom Geschlechte 2), die bezüglich mit  $A, B$  den Gesamtdurchschnitt von  $F_3$  mit zwei durch  $C_4$  gehenden Flächen 2ten Grades bilden. Nimmt man nun die Fund.-Punkte 1, 2, ... 6 der ebenen Abbildung von  $F_3$  so an, dass den Geraden  $A, B$ , die Kegelschnitte 1.3.4.5.6, 2.3.4.5.6 entsprechen, so wird sich auch die niedrigste Abbildung von  $F_5'$  ergeben: die Bilder der ebenen Schnitte dieser Fläche werden Curven 5ter Ordnung sein, die zwei Doppelpunkte 1, 2 und zwölf einfache feste Punkte 3, 4, ... 14 haben: wo die Punkte 7, 8, ... 14 den Durchschnittspunkten von  $F_3$  und  $C_4$  entsprechen <sup>1)</sup>.

Legt man  $F_3$  nicht durch  $A$  und  $B$ , aber durch  $C_4$  hindurch, so erhalten wir wieder eine Fläche  $F_5'$  5ter Ordnung, mit der Doppelcurve  $C_4'$  (1ter Species). Die 14 Geraden dieser Fläche entsprechen 1° den 2 Punkten  $a$ , in welchen  $A, B$  die  $F_3$  ausserhalb  $C_4$  noch treffen; 2° den 10 Geraden  $b$  von  $F_3$ , welche Sehnen von  $C_4$  sind; 3° den 2 Kegelschnitten, die durch einen Punkt  $a$  gehen und  $C_4$  viermal begegnen. Um zur niedrigsten Abbildung von  $F_5'$  zu gelangen, wird man fünf Fund.-Punkte 1, 2, ... 5 der Abbildung von  $F_3$  so annehmen, dass sie fünf Geraden  $b$  darstellen. Ist 0 der sechste Fund.-Punkt dieser letzten Abbildung, und sind 6, 7 die Bilder der zwei Punkte  $a$ , so werden die Curven 4er Ordnung 0<sup>2</sup>.1.2.3 ... 7 den ebenen Schnitten von  $F_5'$  entsprechen.

Dieselbe Transformation bietet eine unmittelbare und ungemein leichte Behandlung einer

1) Math. Annalen, Bd. 1, S. 306.



$F_3$  gegeben. Wir führt die Transformation eine Fläche 3ter Ordnung  $F_7'$  mit dem dreifachen Kegelschnitte  $C_2'$  und der Doppelcurve  $C_4'$  ein. Diese Fläche enthält 9 Gerade und 9 Kegelschnitte: eine Gerade ist die Sehne  $o$  von  $C_2'$ ; die anderen 8 Geraden sind die Tangenten, welche noch  $C_2'$  treffen. In der niedrigsten Abbildung werden die ebenen Schnitte durch Curven 6ter Ordnung dargestellt, die neun Doppelpunkte 1, 2, 3, 4, 5 und neun einfachen Puncte 6, 7, 8... 14 enthalten. Der dreifache Kegelschnitt bildet sich aus der Curve 6ter Ordnung  $1^2.2^2.3^2.4^2.5^2.6^2.7^2.8^2.9^2$ , und die Doppelcurve  $C_4$  auf einer hyperelliptischen Curve 9ter Ordnung  $1^3.2^3.3^3.4^3.5^3.6^3.7^3.8^3.9^3$ .

Wenn wir durch  $C_2$  eine Fläche 2ten Grades, durch  $C_4$  eine Fläche 4ter Ordnung und durch den Doppelkegelschnitte  $C_2'$  erhalten. Wenn wir durch  $C_4$  gelegten Fläche  $F_4$  4ter Ordnung, welche eine von  $C_4$  dreimal geschnittene Doppelgerade besitzt, entspricht eine Fläche 6ter Ordnung  $F_6'$ , welche  $C_2'$  einfach,  $C_4'$  dreifach enthält und einen auf  $C_2'$  gelegenen dreifachen Punct  $o$  hat. Dieser Puncte gehören die drei von  $o$  ausgehenden Sehnen von  $C_4$  an, und ausserdem vier andere Gerade, welche  $C_4'$  dreimal schneiden. In der niedrigsten Abbildung von  $F_6'$ , werden die ebenen Schnitte durch Curven 7ter Ordnung abgebildet, die neun Doppelpunkte und sieben einfache Puncte gemein haben. Das Bild des dreifachen Punctes  $o$  ist eine Curve 3ter Ordnung, welche die neun doppelten und drei einfachen Fund.-Puncte enthält. Der Doppelcurve  $C_4'$  entspricht eine hyperelliptische Curve 14ter Ordnung, welche viermal durch  $h$  jeden doppelten, zweimal durch die oben erwähnten





Transformation 3: im zweiten Raume werden  
 das lineare System  $(C' D', E', F', A', F')$   
 durch 4 Punkte man diese Transformation auf  
 die Ebene 3.  $C'$  gehende cubische Fläche  
 überführen, man eine mit drei drei-  
 fachen Punkten  $C'$  und drei zweifachen  
 Geraden  $D', E', F'$  behaftete Fläche 7ter  
 Ordnung ableiten. Diese Fläche enthält  
 noch eine ebene Gerade. In der niedrigsten Ab-  
 bildung lassen die ebenen Schnitte zu Bildern  
 Curven 3ter Ordnung, die neun einfache feste  
 Punkte 1.2.3.4.5.6.7.8.9 haben. Den vielfachen Geraden  
 $D', E', F'$  entsprechen die Kegel-  
 schnitte 1.2.3.4.5, 1.2.3.4.6, 5.6.7.8.9 und die Ge-  
 raden 6.7, 9.7, 7.8.

*Beispiel.* — Setzen wir nun voraus  
 dass  $K_3$  aus einer ebenen cubischen Curve  $K_3$   
 und aus einer cubischen Raumcurve  $C_3$  bestehe,  
 dass  $C_3$  und  $K_3$  drei Punkte gemein haben;  
 dass  $K_3$  eine mit einem dreifachen Punkte  
 behaftete Raumcurve  $K_3'$  6ter Ordnung, vom  
 Grade 1. Legt man durch  $K_3$  eine Fläche  
 3ter Ordnung, so wird der umgeformte Ort  
 eine Fläche  $F_6'$  6ter Ordnung sein, welche  
 $K_3$  zur Doppelcurve und  $o$  zum drei-  
 fachen Punkte hat. Diese Fläche enthält  
 sechs nicht schneidende Gerade, welche den 6  
 innerhalb  $K_3$  fallenden Durchschnittspunkten  $a$   
 von  $K_3$  mit  $C_3$ ; und 27 Kegelschnitte, welche den  
 27 Geraden von  $F_3$  entsprechen. Die ebenen  
 Schnitte von  $F_6'$  werden auf  $F_3'$  durch Curven  
 3ter Ordnung dargestellt, welche von den die  
 sechs Punkte  $a$  enthaltenden Flächen 2ten Grades  
 ausgeschnitten werden. Handelt es sich also  
 darum, die cubische Fläche  $F_3$  in die Fläche  
 6ter Ordnung  $F_6'$  überzuführen, so kann man  
 statt der cubischen Transformation, deren Grund-



... Ort der die Curve  $K_6'$  dreimal treffenden Geraden ist.

Sei  $C_3$  das System von drei Geraden  $A, B$ , von denen die beiden ersten windschief liegen, und beide von der dritten geschnitten werden.

Wenn wir nun eine windschiefe Fläche  $(m+n)$ ter Ordnung an, auf welcher  $A$  eine  $m$ -fache,  $B$  eine  $n$ -fache Directrix, und  $C$  eine einfache Erzeugende liegt. Der entsprechende Ort im andren Systeme wird dann ein Kegel  $(m+n-1)$ ter Ordnung mit der Spitze  $o$  sein: dieser Kegel besitzt eine  $(m-1)$ fache und eine  $(n-1)$ fache Curve,  $A', B'$ .

*Neuntes Beispiel.* — Seien nun die Bestandtheile von  $K$  eine cubische Raumcurve  $C_3$ , eine Gerade  $C_1$ , und ein Kegelschnitt  $C_2$ , welcher  $C_3$  dreimal und  $C_1$  zweimal begegnet. Dann besteht  $K'$  aus einer rationalen Curve  $C_5'$  5ter Ordnung mit einem dreifachen Punkte  $o$ , und aus einer Sehne  $C'$ , derselben Curve. Mittels dieser Transformation geht eine durch  $C_2$  gelegte Fläche  $F_2$  2ten Grades in eine Fläche 5ter Ordnung mit dem dreifachen Punkte  $o$  und der Doppelcurve  $C_5'$  über. Diese Fläche enthält ausser  $C_1'$ , noch 9 Gerade, welche den drei (nicht auf  $C_2$  liegenden) Begegnungspunkten  $a$  von  $F_2$  mit  $C_3$ , und den sechs aus den Punkten  $a$  ausgehenden Geraden von  $F_2$  entsprechen: und diese 10 Geraden bilden 10 Doppeldreien<sup>1)</sup>. Auf  $F_3'$  liegen fünf Schaaren von Kegelschnitten: und die Auflösung der Gleichung 5ten Grades, welche diese fünf Schaaren gibt, liefert ohne weiteres die Auflösung der zwei Gleichungen 10ten Grades, von denen die zehn Geraden und die zehn Doppeldreien abhängen. — Den ebenen

1) Mathem. Annalen, 3er Band, S. 75, Anmerkung.







einfachen festen Punkten 1, 2, .. 9, und dreifachen Curve eine Curve 9ter Ordnung  $0^5 2^1 \dots 9^1$  entspricht. Die Punkte dieser Curve bilden solche Tripel, dass, wenn eine von 0 abgehende Gerade die Curve in vier Punkten schneidet, die vier Punkte von zugehörigen Punkten mit 1, 2, .. 9 zusammen auf einer Curve 4ter Ordnung liegen, welche in 1 einen Doppelpunkt hat.

Es gibt eine Transformation 4ten Grades, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen 4ter Ordnung entsprechen, welche einen doppelten Durchschnitt, eine Curve 4ter Ordnung und 2 Spitzen und einen Punkt gemein haben. Die umgekehrte Transformation ist wieder 4ten Grades.

Es gibt auch andere Transformation 4ten Grades, in welchen den Ebenen des ersten Raumes Flächen der Ordnung, welche einen gemeinsamen Doppeldurchschnitt haben und durch eine feste Curve der Ordnung (vom Geschlechte 1) gehen. Die umgekehrte Transformation ist nur 3ten Grades.

Es gibt eine Transformation  $n$ ter Ordnung, bei welcher den Ebenen eines Raumes Flächen  $n$ ter Ordnung entsprechen, welche eine  $(n-2)$ fache Gerade und eine Curve  $(3n-4)$ ter Ordnung (vom Geschlechte  $3n-7$ ) gemein haben. Diese Curve zerfällt die vielfache Gerade in  $3n-7$  Punkte. Die umgekehrte Transformation ist wieder  $n$ ten Grades.

Schliesslich können wir aussagen: sobald die ebene Abbildung einer Fläche vorliegen ist, ist man im Stande, alle Transformationen anzugeben, bei welchen den Ebenen eines Raumes Flächen entsprechen, die derselben Art sind, wie die gegebene, und welche dieselben vielfachen Linien und Punkte besitzen.





sation der Hyperiden auf und gaben mir Veranlassung zu einer ausführlichen Arbeit<sup>1)</sup>, an der ich mir erlaube, im Nachfolgenden eine Besinnung mitzuteilen.

### 1. *Oxycephaliden*.

Ich beginne mit dem Nachweise eines bei den *Oxycephaliden* bislang noch nicht bekanntgewesenen Gehörorganes. Dasselbe findet sich bei allen *Oxycephaliden*, die ich bislang untersuchen konnte, oberhalb der Fühlerbasen zwischen den grossen Nerven, welche zu dem vorderen der beiden tragenden Fühlerfüsse gehen. Überall trifft man in dem mittleren Drittelschritt zwei grosse, der Mittellinie mehr oder minder genäherte Gehörblasen, zu denen von den Fühlerfüssen je ein längerer oder kürzer Nerv verläuft. Die Wandung des grossen membranösen gefüllten Säckchens besteht aus doppelten Membranen, einer äussern Bindegewebshülle mit einer inneren reich mit Kernen erfüllten Hülle. Die erstere geht als Fortsetzung aus der Scheide des Gehirnes hervor und wird durch einen langen fadenförmigen Ausläufer eine Art Aufhängeband, getragen. Die innere Hülle mit ihren zahlreichen Zellresten und Kernen verräth Natur zu sein; in dieselbe tritt bei *Oxycephalus* circa 20 Nervenfasern endigende kurze Gehörnerv, ohne dass es möglich war, an den Weingeistpräparaten über das Ende derselben ins Klare zu kommen. Hörstäb

<sup>1)</sup> Dieselbe ist wesentlich gefördert worden durch die Liberalität des Hamburger Museums, dessen prachtvoll erhaltenes noch nicht näher bestimmtes meist von Captn. Schnebagen gesammeltes Hyperidenmaterial mir von Herrn Dr. Bolau zur Bestimmung und zum freier wissenschaftlichen Gebrauche übersandt wurde.



der *Oxycephaliden* (und auch *Typhiden*) im Zusammenhang. Im Abdomen finden sich nur 3 Ganglien und zwar in den 3 vorderen Segmenten, sodass die ganze Bauchkette nicht mehr als 8 Anschwellungen darbietet. Was die Seitennerven anbetrifft, so treten dieselben keineswegs, wie Leydig<sup>1)</sup> bemerkt nur aus den Ganglien, sondern überall ganz constant auch aus den Längscommissuren zwischen den Ganglien hervor.

Der Darmcanal trägt zwei lange, bei *Simorhynchus* und *Schnehaemus* vielfach ausgebuchtete und in kurze Nebenanhänge auslaufende Leberschläuche. Das Herz erstreckt sich vom 2ten bis zur Mitte des 6ten Brustsegmentes, besitzt 2 Paare von Spaltöffnungen im 3ten und 4ten Segmente und setzt sich an beiden Enden in enge Arterien fort. Kiemenanhänge erheben sich in der Regel, wie bei den Hyperiden überhaupt, an allen Beinen mit Ausnahme des vordern und hintern Paares, sind jedoch bei *Oxycephalus* auf das 5te und 6te Beinpaar reducirt.

Die beiden Geschlechter unterscheidet man mit Sicherheit an der Form des vordern Fühlerpaares, dessen Schaft beim Weibchen schmal bleibt und nur wenige Riechhaare trägt. Dazu kommt, dass wenigstens bei *Oxycephalus* und *Rhabdosoma*, wahrscheinlich aber auch bei den übrigen Gattungen, von denen nur die Männchen bekannt geworden sind, dem Weibchen sowohl die hintern Fühler als die Mandibulartaster fehlen. Im männlichen Geschlecht bestehen die langen Hintertfühler aus vier dünnen stabförmig gestreckten Gliedern und einem kurzen Endgliede. Alle sind am Innenrand mit zahlreichen feinen Tasthaaren besetzt.

<sup>1)</sup> Leydig, Handbuch der vergleichenden Anatomie. 1. Band. Tübingen 1864.



*Orycephalus* Edw. Körper gestreckt, im weiblichen Geschlecht mit erweiterter Brustregion, Schnabel triangulär, vorn zugespitzt, von ansehnlicher Grösse. Geissel der vordern Antennen 3gliedrig. Basalglied des Mandibulartaster stabförmig bis in die Nähe der vordern Antennen verlängert. Die beiden kurzen vordern Beinpaare enden mit zusammengesetzter Scheere. Caudalgriffel mit 2 lanzetförmigen Aesten. Schwanzplatte triangulär.

*O. piscator* Edw. Schnabel beträchtlich kürzer als der Kopf. Die Brustsegmente auf dem Rücken je in 2 warzenförmige Erhebungen ausgezogen, an den Seiten mit 2 Paaren von Tuberkeln. Die 3 vordern Abdominalsegmente laufen in der Mitte des Seitenrandes in eine hakenförmige Spitze aus. Endäste der 2 hintern Caudalgriffelpaare nur wenig kürzer als das Basalglied. Circa 20 (♂) bis 30 (♀) mm. lang.

Findet sich weit verbreitet im Indischen Meere und im Atlantischen Ocean.

Die von Guérin als *O. oceanicus* beschriebene Form ist nichts als das nur unausgebildete Männchen von *O. piscator*, dessen Hinterantennen<sup>1)</sup> noch relativ kurz sind und aus 4 schlauchförmigen mit Füllungsstellen erfüllten Gliedern bestehen. Ebensowenig nach der Sonderung des Endgliedes entschieden. Ebenso sind die Mandibulartaster noch ganz kurz und in der Bildung be-

<sup>1)</sup> Ohne allen Zweifel werden sich die jungen Männchen von *Orycephalus* eben so verhalten, da ein so hoch ausgebildetes Organ wie die hintern Antennen derselben unmöglich schon in dem ersten Entwicklungsstadium erscheinen kann. Demnach dürfte die Fr. Müller entnommene Beschreibung in Darwin's Werke die Abstammung des *Mene* aus mit der geschlechtlichen Zuchtwahl 1871. aus zu bezweifeln sein.



Das verschmolzene Abdominalsegment etwas länger als das voraus gehende 4te Segment. 2tes Caudalgriffelpaar mit den lanzetförmigen Aesten über den Rand des verschmolzenen Schwanzsegmentes hinausragend. Schwanzplatte linear, ungefähr so lang als die vorausgehenden Schwanzsegmente. Ungefähr 2 Zoll lang. Südsee und süd. atl. Ocean.

*Simorhynchus* n. g. Kopf breit und gedrun-gen, mit kurzem schräg abfallenden vorn abgestutzten Stirntheil (Schnabel), in seiner Form einem Nagethierkopfe ähnlich. Untere Seitenränder des Kopfes weit abstehend. Körper gedrun-gen. Ganglien der Bauchkette sehr dicht gedrängt, mit ganz kurzen Längscommissuren Vordere Antennen mit 3gliedriger Geissel. Stilglied der hinteren Antennen stark gekrümmt und viel kürzer als die nachfolgenden Glieder. Leberschläuche breit mit secundären Ausstülpungen. Mandibulartaster kurz, Basalglied nur wenig länger als die nachfolgenden Glieder. Vorderes Beinpaar ohne Scheere. 2tes Beinpaar endet subcheliform. 5tes und 6tes Beinpaar mit breiten mächtigen Femoralplatten. 7tes Beinpaar klein mit Femoralplatte und schwäch-tigem aber vollkommen gegliederten Bein. Hinterer Abschnitt des Abdomens kurz und gedrun-gen. Letzter Caudalgriffel zangenförmig nur mit beweglichem fingerförmigen Aussenaste.

*S. antennarius* n. sp. Stil der männlichen Vorderfühler mit vorspringendem conischen Fort-satz, die Antennen ausserordentlich lang, zusam-mengelegt bis zum Abdomen reichend. Augen-pigment gelb. 5tes Beinpaar länger und schlan-ker als das 6te. Stilglied der Caudalgriffel kaum länger als die ziemlich breiten lanzetförmigen









gestellt worden ist, sich seitdem  
 verbessert hat, nach der glorreichen  
 des letzten staunenswerthen Krieges  
 eines segensreichen Friedens end  
 Angriff genommen werden wird.  
 wenn dieses neue Museumsgebäude,  
 der Universitäts-Baumeister Herr La  
 Döltz einen vortrefflichen P  
 hat, vollendet ist, wird es mögl  
 die hiesige geologische Sammlung, v  
 Folge der in dem letzten Jahrzehnt  
 Neuerwerbungen in manchen Abtheil  
 besonders in den vulkanischen Gestein  
 u. Triasformation, den Silurischen l  
 and Brachiopoden, sowie den Pleistocae  
 sich schon neben die älteren Sam  
 unserer Schwesteranstalten stellen kann  
 wahrhaft nutzenbringenden und würdig  
 aufzustellen.

Im Jahre 1870 hat das geologische Insti  
 und neben der Waagenschen Sammlung,  
 deren Transport allein ein Viertel  
 jährlichen Ordinariums in Anspruch na  
 reichhaltigen Zuwachs erfahren. In  
 alsammlung ist die geologische  
 um eine gute Reihe Handstücke v  
 Gabbro und anderen Gesteinen aus d  
 die der Unterzeichnete sammelte, v  
 worden und aus dem Nachlass des He  
 O. Schilling schenkte Herr Jewett z  
 eine Serie von Harzer Granit und Hornf

Die paläontologische Abtheilung erhi  
 von Herrn Oekonom Kehr zwei Saurierwir  
 aus dem Kohlenkeuper des Hainberg. Sie wu  
 durch ein ungewöhnlich grosses Exemplar  
 Ammonites Bucklandi Sow. von Ohrlek  
 eine kleine Serie von Versteinerungen aus d



erwähnen, die wir Herrn Dr. G. Lindström zu Wisby verdanken. Dieselbe umfasst 138 Arten in meist vortrefflicher Erhaltung. Aus dem Buntsandstein von Bernburg wurde eine Anzahl interessanter Exemplare der *Pleuromeys Sternbergi Münster sp.* und des *Trematosaurus Brauni Burm.* angekauft. Unter den Schädelchen des letzteren befand sich ein bis auf das Schnautzenende vollständiges Exemplar, welches vollkommen präparirt und gereinigt werden konnte und jetzt wohl eins der schönsten Stücke sein dürfte, welches bisher bekannt geworden. Einen Schädel von *Archegosaurus Decheni Meyer* aus dem Kohlenrothliegenden von Saarbrücken mit trefflich erhaltenem Zungenbeinkörper schenkte Herr Dr. E. Weiss zu Bonn. Demselben gütigen Geber verdankt die Sammlung noch mehrere Koprolithen und *Leaia Bäntschiana Beyr.*, eine Auswahl von Muscheln aus dem Voltziensandstein und Muschel-sandstein der Gegend von Saarbrück sowie ein Exemplar der *Anomopteris Mougeoti Brongn.* und durch seine gefällige Vermittlung erhielten wir von der kgl. Bergschule zu Saarbrück ein Aststück und ein Zapfenstück von *Voltzia heterophylla Brongn.* Herr Ob.-Ger.-Director Witte in Hannover schenkte *Chemnitzia undosa* und *Turrilitis Bergeri Brongn.* aus der Kreideformation Ostindiens, Herr Dr. Losen in Berlin *Pterinea Bilsteineusis F. Röm.* und eine *Grammysia*-Art aus dem Unterdevon von Bilstein, Herr O. Popp z. z. hier einen schönen *Fucoiden* aus Toskana. Angekauft wurden gute Exemplare von *Asterias asperula F. Röm.* und *A. spinosissima F. Röm.* und *Aspidosoma Tischbeinianum F. Röm.* aus dem unterdevonischen Dachschiefer



züge des geologischen Baus dieser Gegend einzuprägen. Als eine Zierde des Zimmers für vulkanische Gesteine schenkte Herr Prof. Sartorius von Waltershausen seine grosse schöne *Carta topographica dell' Etna*.

Einen schweren Verlust hat im verflossenen Jahr die geologische Sammlung durch den Tod des Herrn Dr. Schilling erlitten. Oskar Schilling, Sohn des Hrn Bergmeister Schilling in Zorge im Harz empfing seine Schulbildung auf dem Gymnasium zu Blankenburg und bezog dann um sich für den echt harzerischen Beruf seines Vaters vorzubereiten die Bergacademie zu Clausthal, welcher er bis Ende 1863 angehörte. Unterstützt durch die eingehendste Localkenntniss hat Schilling schon damals mit grossem Eifer und Erfolg dem geognostischen Studium des Harzgebirges sich zugewendet, denn ihm verdankte F. A. Römer die Petrefaeten aus den Kalken von Wieda und unweit Zorge, welche er in seinem fünften Beitrag zur geologischen Kenntniss des Harzgebirges 1866 beschrieb. Im Januar 1864 ging dann Schilling an das Polytechnicum in Carlsruhe und wurde hier bald Assistent bei Professor Zittel unter dessen Leitung er sich auch bei den Aufnahmen für die geologische Karte des Grossherzogthums Baden betheiligte. Diese vorherrschende Beschäftigung mit Geologie und der stete Umgang mit einem so kenntnissreichen und lebenswürdigen Forscher scheinen damals zuerst Schilling bestimmt zu haben die Praxis zu verlassen und sich der Wissenschaft zuzuwenden. Michaelis 1865 siedelte er dann als Assistent bei Professor Sartorius von Waltershausen hierher, nach Göttingen über. Er wandte sich jetzt mit aller Kraft der Erforschung des ihm wieder so nahe lie-





dem 7. Westphälischen Infanterie No. 56 gedient. Er zog als Gefreiter in der ersten Compagnie mit ins Feld wurde aber bald Unterofficier. In der Schlacht bei Mars la Tour ward er während er tapfer seinen Mann stand durch einen Schuss in den Kopf niedergeworfen und kam darauf nach Gorze ins Lazareth. Hier erholte er sich allmählig wieder so weit, dass man seine Wiedergenesung hoffen konnte und es möglich war ihn Ende September über Nancy nach Karlsruhe und bald darauf hierher zu evacuiren. Als er hier ankam war aber sein Zustand schon weniger befriedigend und verschlechterte sich, trotz der sorgsamsten Pflege die er hier im Lazareth in der Landes-Irren-Anstalt fand, immer mehr bis er am 20. November nach qualvollen Leiden verschied.

Obgleich Dr. Schillings Verpflichtungen sich auf seine Thätigkeit in der mineralogischen Sammlung beschränkten, so hat er sich doch stets auch warm für die geologische Sammlung und zwar besonders für deren geognostische Abtheilung interessirt und in uneigennützigster Weise zu deren Vermehrung beigetragen, wie dies schon aus den früheren Berichten hervorgeht, ja von der in den letzten zwei Jahren beträchtlich angewachsen Sammlung der Harzgesteine hat er geradezu den grösseren Theil selbst gesammelt und geschenkt.

Von Arbeiten in der Sammlung habe ich besonders hervorzuheben, dass die Silurischen Corallen von Herrn D. Desmaison sämmtlich neu bestimmt und in zweckmässiger und eleganter Weise aufgestellt worden sind. Herr Brackebusch hat einen Theil der Fische neugeordnet während ein anderer Theil von dem Unterzeichneten durchgearbeitet wurde. Die von Demsel-



- New Seven-Year Catalogue of 2760 Stars for 1864.  
 Appendix II to Greenwich Observations, 1868. Greenwich. 4.  
 Results of the Magnetical and Meteorological Observations. Greenwich 1868. 4.  
 Proceedings of the Royal Society. Vol. XVIII. Nr. 119—122. — Vol. XIX. Nr. 123.  
 G. B. Airy, Astronomical and Magn. and Meteorol. Observations made at the R. Observatory, Greenwich, 1868. London 1870. 4.  
 Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève. Tome XX. Seconde Partie. Genève 1870. 4.  
 Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie II. Tomo VIII. Fasc. 1—4. Tomo IX. Fasc. 1—4. Bologna. 4.  
 Rendiconto delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze. Bologna 1868—69. 8.  
 Anales del Museo Publico de Buenos Aires. Entrega Septima. Primera del Tomo segundo. Buenos Aires 1870. 4.  
 Freiburger Diöcesan-Archiv. Organ des kirchlich-historischen Vereins der Erzdiöcese Freiburg für Geschichte etc. Bd. I—V. Freiburg i. Br. 8.  
 Mittheilungen des historischen Vereins für Steiermark. Heft 18. Graz 1870. 8.  
 Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft f. vaterl. Cultur. Abth. f. Naturwissenschaften u. Medicin. 1869—70. — Philosophisch-historische Abtheilung 1870. — Breslau. 8.  
 Siebenundvierzigster Jahresbericht der Schlesischen Ges. f. vaterl. Cultur. 1869. Breslau 1870. 8.  
 H. Krone, der Albert'sche Lichtdruck. Dresden 1871. 4.  
 Fr. Palacky. Zur Böhmischen Geschichtsschreibung. Prag 1871. 8.  
 Dr. E. Brücke, die physiologischen Grundlagen der neuhochdeutschen Verskunst. Wien 1871. 8.  
 v. Haidinger's Bericht über Biographisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich von Dr. C. v. Wurzbach. Wien 1871. 8.  
 v. Haidinger, Bericht über Fr. v. Hauer's Geologisches Uebersichtskarte der österr. ungarischen Monarchie. Wien 1871. 8.

(Fortsetzung folgt.)

---



dem Besitze eines mächtigen Fangfusspaares, kleinere bereits mit 5 Schwimmfusspaaren ausgestattet Larve in dem inneren Bau und vornehmlich in dem Bau des Herzens die Stomatopoden-merkmale unverkennbar zur Schau tragen. Aber weder die Art und Weise, wie die Larve ihre Gestalt gewonnen, noch die weiteren Schicksale derselben und ihre Verwandlung in die geschlechtsreife Thierform konnten näher bestimmt und erörtert werden. Fr. Müller<sup>1)</sup> suchte zwar vermuthungsweise beide Larven als in derselben gleichen Entwicklungsreihe zusammengehörig betrachten und die grössere als ein späteres Stadium der kleinern aufzufassen, war aber nicht im Stande eine nur einigermaßen zutreffende Erklärung dieses Vorganges zu geben. Die von ihm versuchte Deutung war vielmehr, wie aus dem mitzutheilenden Beobachtungen hervorgeht, ein unglückliche.

Erklärt sich nun auch die völlige Unbekanntschaft mit der Embryologie der Squilliden aus der Schwierigkeit, die in den Wohngängen dieser Krebse abgesetzten Eier lebendig zu erhalten, so sieht man doch nicht ein, wesshalb sich die postembryonale Metamorphose der Forschung so lange entzogen hat. Denn wenn es auch nicht gelingt, die Larvenstadien in continuirlicher Reihenfolge lebend aus einander zu züchten, dürfte doch schon eine sorgfältige auf umfassende des Material Bezug nehmende Vergleichung der glashellen als *Alima*, *Erichthus* und *Squilla* *erichthus* beschriebenen Stomatopoden uns ein annähernd vollständiges Bild von der Metamorphose

1) Fritz Müller, Bruchstück zur Entwicklungsgeschichte der Stomatopoden. Archiv für Naturgesch. 1864. Derselbe, ein zweites Bruchstück aus der Entwicklungsgeschichte der Stomatopoden. Ebendaselbst 1864.



... mehr den Bau der Zoëabeine,  
 ... kürzer und verbreiteter Form,  
 ... sind ungleichmässig gestaltet.  
 ... einen mässig langen Schnabel  
 ... Fühlerpaare. Ihre Mund-  
 ... bereits vollzählig angelegt, auch  
 ... von Fr. Müller irrthüm-  
 ... des obern Maxillenpaares  
 ... bereits als deutlich gesonderte  
 ... nachweisbar. Die drei hintern fuss-  
 ... drei hintern Bruststringen entspre-  
 ... Segmente enden mit einer verbreiter-  
 ... ausgestreckten Schwanzplatte. Die  
 ... Weise, wie sich diese Larve zur Sto-  
 ... heranbildet, konnte durch eine  
 ... Stadien in continuirlicher Folge  
 ... ) werden.

Die ältere Larve von etwa drei mm. Länge  
 ... Wesentlichen dieselben Verhältnisse,  
 ... erscheint der innere Ast des zweiten  
 ... schwimmfusspaares stark erweitert, auch bedeu-  
 ... verlängert und schliesst bereits unter der  
 ... die Anlagen des grossen Fangfusses ein.  
 ... kommt, dass sich vor der Schwanzplatte  
 ... Segment gebildet hat und jederseits  
 ... kleinen zweilappigen Anhang trägt. Die  
 ... vordern Schwimmpfusspaare entspre-  
 ... demnach den zwei vordern Kiefer-

Die von Fr. Müller aufgestellte Conjectur, nach  
 ... die drei vordern Schwimmpfusspaare die Anlagen  
 ... Maxillen, des ersten und zweiten Maxillarfuss-  
 ... seien, die 2 nachfolgenden Paare aber die Schwimmpfuss-  
 ... der 3 ersten Abdominalsegmente darstellten, schien  
 ... von vornherein bedenklich, da sie die Annahme  
 ... setzte, dass sich die 6 fehlenden Thoracalsegmente  
 ... den Segmenten mit so gleichartigen Gliedmassen  
 ... schoben würden, und hat sich auch in der That nicht  
 ... bestätigt.





sitzen bereits die volle Zahl der Hinterleibssegmente — bis auf das 6te die Seitenplatten des Schwanzfächers tragende Segment — mit sämtlichen Fussanlagen. Der Grad der Ausbildung der letztern, deren Grösse in continuirlicher Abstufung nach dem Ende des Schwanzes abnimmt, ist je nach der Grösse der Larve verschieden. An den hintern Fühlern hebt sich das Endglied als breitere Lamelle von der stilförmigen Basis ab, in deren Mitte die Geisselanlage als Knospe hervorwächst. Die grösseren etwas weiter vorgeschrittenen Formen von 6 mm. Länge haben den Nebenanhang der schon jetzt langgestreckte und umfangreichen Raubfüsse abgeworfen, dafür jedoch an der Basis derselben die Anlage der scheibenförmigen Platte gewonnen. Ebenso ist der vorausgehende Kieferfuss einfach geworden und besitzt die für den Tasterfuss charakteristisch langgestreckte schmale Form. Die 3 nachfolgenden Schwimmpfusspaare zeigen in ihrer Gestalt keine Veränderung. Die Vorderfühler bestehen aus einem 3gliedrigen Schaft und zwei gestreckten Geisseln, von denen die längere 2gliedrig ist, die kürzere, ihrem Ursprung nach ältere, eine starke Anschwellung bildet und in einen dünn gestreckten Endtheil ausläuft.

Bei Larven von 7 mm. Länge hat die Streckung des Abdomens bedeutend zugenommen, die Schwimmpfüsse des Abdomens sind ziemlich gleichmässig ausgebildet, sämtlich mit zwei borstentragenden lamellösen Aesten versehen. Das hinter kleinste Paar bedeckt die nach aussen vorstehende bereits 2lappige Anlage der seitlichen Schwanzanhänge, deren Entstehungsweise <sup>1)</sup> demnach voll-

1) Mit Rücksicht auf die übereinstimmende Anlage, welche die Füsse des Hinterleibes und die seitlichen Anhänge des Fächers bieten, kann ich die Anschauung Fr. Müllers, welcher diese Gliedmassen nicht als zu-



welche erst im nächstfolgenden Stadium als kleine Knospen sichtbar werden. In diesem Alter einer Körperlänge von etwa 12 mm. ist vordere der drei hinter den grossen Raubfüssen gelegenen Beinpaare bereits ein kleiner Raub mit dicker Greifhand, am zweiten Paare sieht man den gegliederten Raubfuss unter der Hülle versteckt während das 3te Paar nach Verlust des kleinen Nebenastes zu einer sehr geringen Grösse herabgesunken ist. Bei Larven dieser *Erichthys*-form von 14 mm. (bei einer andern von 9 mm. Länge) hat sich die Umbildung auch für das 1te Paar der kleinen Raubfüsse vollzogen, während die schlauchförmigen Knospen der späteren Spätfüsse zwar noch sehr klein sind, aber bereits die Anlage des Nebenastes hervorzutreiben beginnen. Die Schwanzflosse erscheint noch sehr klein und klappig, und an den Füssen des Hinterleibes werden Spuren von Kiemenanlagen bemerkbar.

Die nun folgenden Stadien sind die bekannten *Erichthys*-larven von verschiedener Gestalt, Grösse und Stachelbewaffnung des Schildes, mit breiterem oder engerem mehr oder minder weit vorstehendem Hinterleib. Diese Larven sind sammtlich wie auch die frühern Stadien mit einem sehr langen Schnabelstachel, kleinen seitlichen Stirnstacheln und 2 mehr oder minder langen Seitenstacheln am Hinterrand des Schildes bewaffnet, zu denen noch 2 kleinere Seitenstacheln und ein medianer bis an den Hinterrand herabgerückter Dorsalstachel<sup>1)</sup> hinzukommen können. Diese Larven besitzen überall hinter dem grossen Rau-

<sup>1)</sup> Ich habe den argen Missgriff, in diesem Rückenstachel, den auch zahlreichen Decapodenlarven fehlt, einen Charakter der Zoöa zu erkennen und auf der Grundlage morphologische Schlüsse zu gründen.



segmentes erlangen eine bedeutende Grösse und reichen mit ihrem langen Stachelfortsatz der Mittelplatte oft bis über das hintere Ende des Schwanzschildes hinaus. Die Antennengeissel und Spaltfüsse strecken sich mit dem fortschreitenden Wachsthum, die Kiemenbüschel werden grösser und vollständiger. Die Mandibel erhalten eine einfache schlauchförmige Tasteranlage, die übrigens auch bei grösseren Squillerichthusformen nachweisbar ist. Da die grossen wohl  $1\frac{1}{2}$  Zoll langen Exemplare offenbar der Verwandlung in die Form des geschlechtsreifen Thieres nahe stehen, suchte ich Anhaltspunkte, um die Zugehörigkeit zu einer der Squillidengattungen zu bestimmen und richtete zu diesem Zwecke zunächst mein Augenmerk auf die Gestalt der grossen Raufüsse. Diese weisen durch den Mangel der für Squilla und Pseudosquilla charakteristischen Hakendornen an der Basis des Griffs auf die Gattung Gonodactylus hin, welche auch durch den gedrungeneren Körperbau unsern Squilloidlarven am nächsten steht. Indessen weicht die lange lineare Form der Greifhand auch von Gonodactylus wesentlich ab, so dass eine sichere Entscheidung nicht möglich erscheint. Immerhin ist die Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit der besprochenen Larvenreihe, welche die Erichthus, Squillerichthus und die besprochenen Squilloidformen einschliesst, zu Gonodactylus, eine überaus grosse.

Eine andere Formenreihe, zu welcher die Alimalarven gehören, die aber auch mit Squilloidformen von sehr langgestrecktem und nach hinten verbreiterten Hinterleib abzuschliessen scheint, führt offenbar zur Gattung Squilla hin. In diese gehört die zweite Stomatopo-



ren Seitenanhänge sich durch die Länge des mittleren Dornfortsatzes auszeichnen.

Bei einer Larve von 11 mm. Länge erscheinen die 3 kleinen Raubfusspaare bereits gegliedert und mit dem Scheibenanhang des Basalgliedes ausgestattet, an den drei nachfolgenden Brustsegmenten sind die Anlagen der 3 spaltästigen Ruderbeine als kleine Schläuche hervorgewachsen. Die Füsse des Abdomens beginnen bereits Kiemensp ossen zu treiben und der lange Dornausläufer der seitlichen Schwanzanhänge reicht bis an das Ende der Schwanzplatte. Mit dem fortschreitenden Wachsthum gewinnen die Brustbeine die für die Alima larven bekannte Gestalt, die Kiemenanhänge der Schwanzfüsse werden büschelförmig, die Antennengeisseln erlangen eine grössere Gliederzahl. In diesen Stadien sind mir eine grosse Zahl verschieden gestreckter, offenbar verschiedenen Arten zugehörigen Alimalarven bekannt geworden, von denen die ältern und grössern Formen schon 4 bis 5 Büschel von Kiemenfäden an jedem Schwanzfusse trugen. Ueberall fand ich die für Squilla charakteristischen Hakendornen des grossen Raubfusspaares, dessen Endklauen freilich in der Regel noch keine Hakenfortsätze am Innenrande besaßen.

Wahrscheinlich verwandeln sich die Alimalarven nicht direkt in die Squilla, sondern gehen zuvor in eine sehr langgestreckte Squilloidform über, an welcher auch die 2 bis 3 hintern Thoracalsegmente mit den kleinen Spaltfüssen über den Brustschilde hervortreten. Solche in dem Grade der Ausbildung mit den Squilloidlarven der Erichthusgruppe übereinstimmenden Larven, welche ich auf die Gattung Squilla beziehe, habe ich ebenfalls in ausreichender Zahl untersuchen können.





lassen Arbeiten, welche über die Verhältnisse einige Klarheit v  
Van Beneden jun. gab in seiner a  
grossen Arbeit<sup>1)</sup> zum ersten M  
Beschreibung der Bildung sowie der Fo  
Bestandtheile der Eier unseres Sa  
Stieda<sup>2)</sup> veröffentlichte ferner eine  
über die anatomischen Verhältni  
über die Gestalt des Eies  
sehr schätzenswerthe Aufschlü  
Auf beide Arbeiten werde ich an ein  
Orte näher eingehen. Hier sei nur  
dass van Beneden schon im Winter E  
Polystoma antraf und dass Stieda nur ein  
dieses Wurms beobachtete. Ich sel  
nun im März d. J. hier in Cassel me  
Sachtungen wieder auf. Aus Göttingen erh  
braune Frösche und in diesen fand ich m  
unter zwölf Individuen das Polyst  
gewünschten Zustande des Eierlegens.  
sammelte auf das Sorgfältigste die schon in  
Blase abgelegten Eier und setzte sie  
Schälchen mit Wasser. Diejenigen Schälch  
welche nur wenige Eier enthielten, zeig  
Fortschritte an denselben, dasjenige l  
welches viele enthielt, musste bald gele  
werden, da die Eier darin zu Grunde ging  
ersteren entwickelten sich dann in 20 Tag  
Embryonen.

Das sehr voluminöse Ei (0,20 mm. lang)  
Polystoms besteht, wie van Beneden gezeigt h  
aus einer Eizelle, welche Bildungsdotter, Kei  
bläschen und Keimfleck mit Kernkörperch

1) Recherches sur la composition et la significat  
de l'oeuf pg. 33 u. ff.

2) In Reicherts Archiv f. Anatomie und Medic  
1. Heft.



erschiene  
 einschläg  
 schafften  
 gezeichn  
 eine Be  
 und de  
 wurms.  
 leit, w  
 und e  
 Schma  
 gab.  
 ander  
 merkt  
 bei P  
 das l  
 nahm  
 Beol  
 ich l  
 in e  
 im  
 sam  
 Har  
 Sch  
 nur  
 bal  
 geg  
 wei  
 In  
 die

Po

... Vorderen ...  
 ... zwe. Augen ...  
 ... zrosser ...  
 ... schwach ...  
 ... Vor. Verdauung ...  
 ... Mund ...  
 ... angelegt ...  
 ... der ...  
 ... und dazu ...  
 ... angefüllt ...  
 ... Saugscheibe ...  
 ... in Kreise ...  
 ... welche ...  
 ... des erwachsenen ...  
 ... als Larve ...  
 ... ist ...  
 ... zweifelt ...  
 ... allerdings ...  
 ... angelegt ...  
 ... des Thiers ...  
 ... dichter und ...  
 ... weicher es befähigt ...  
 ... Fähigkeit zu bewegen ...  
 ... Hörter, und wie ...  
 ... ansetzt, so setzt sich ...  
 ... Saugscheibe an ...  
 ... Wasser antrifft, dabei ...  
 ... und her taster ...  
 ... zusammenziehen ...  
 ... nicht aus den ...  
 ... ausschöpfen sehen, die ...  
 ... würde er sofort ...  
 ... mit dem Gen ...  
 ... Denn wie bei G ...  
 ... wir sechzehn kleine Hä ...  
 ... Bauchscheibe und wie bei C

als Nordm. vier Augenflecke. Natürlich ist die Aehnlichkeit nur eine scheinbar berechtigen uns diese Beziehungen der Ectoparasiten der Fische von einer Polystomaartigen Larve des Polystoma an, denn so wird ein Jeder am Besten die Gestalt vergegenwärtigen können. Was nun aus dieser Larve wird, ist vielleicht eine Beobachtung von später Aufschliess, der in der Harnblase eines Frosches ein junges Polystoma welches im Uebrigen den älteren gleichkam in derselben Lage, wie wir es vorher gesehen, vier Augenpunkte trug. In der Gestalt sowie die Grösse unseres Thieres seiner äusseren Gestalt die grösste Aehnlichkeit mit den älteren zeigt, führen zu der Vermuthung, dass die Polystomal-Larve in die Frösche einwandere. Ich werde vermuthlich in diesem Frühjahr noch Gelegenheit erhalten, dies experimentell nachzuweisen in einer ausführlicheren, mit Abtrocknen Arbeit, an einem anderen Orte zurückkommen.

Cassel, 14. April 1871.

### *Pemphix Albertii* Meyer

aus dem unteren Nodosenkalk des Ha-

Die Decapode Krebse waren meines Wissens im ganzen mittleren und nördlichen Deutschland mit Ausnahme von Oberschlesien bisher nicht gefunden worden. Ich war daher nicht überrascht als ich im verflossenen März











der Stirnfortsatz. Dieser Letztere ist dreischneidig, die Seitenkanten sind mit gröberen, die obere, mittlere mit feinen nach vorn gewendeten Dornen versehen.

Wäre dieser vordere Theil der Schale besser an den zwei Süddeutschen Exemplaren erhalten gewesen, so würde vermuthlich H. v. Meyer diesen Krebs gar nicht zu *Pemphix* gebracht oder doch wenigstens ihn nicht dauernd bei dieser Gattung gelassen haben, denn derselbe steht offenbar seinen Gattungen *Lithogaster* und *Lissocardia* mindestens ebenso nahe als dem echten *Pemphix Sueurii*. Zu *Lissocardia* hat Eck bekanntlich auch die beiden Gattungen und Species *Aphtharthus ornatus* Meyer und *Myrtonius serratus* Meyer gebracht die er für nur eine Species hält (Eck Muschelkalk in Oberschlesien p. 108). Völlige Sicherheit über die Beziehungen unserer Form zu diesen beiden Gattungen wird natürlich nur durch Vergleichung mit den Originalexemplaren zu erlangen sein. Nach den vorhandenen Beschreibungen und Abbildungen vermute ich jedoch, dass die *Lithogaster*, *Lissocardia*, *Pemphix Alberti* Meyer und *Pemphix Meyeri* Alb. eine enge verknüpfte und eventuell als eine Gattung unter der Bezeichnung *Lithogaster* zu vereinigen Formreihe darstellen. Jedenfalls stehen aber die beiden letzten als *Pemphix* bezeichneten Arten von Oppel als *Pseudoglyphaea* ausgeschiedenen Formen, wie eine Vergleichung mit seiner *P. grandis* Meyer sp. (Meyer N. Gall. Krebse p. 17 T. IV fig. 27 a, b und Oppel. Paläont. Mittheil. I p. 52 T. XIII fig. 1 a und b) zeigt mindestens ebenso nahe als dem typischen *Pemphix Sueurii*. Sobald es mir möglich gewesen sein wird Originalexemplare von *Lithogaster*



nicht homogene) Coordinaten eines  $R_n$  mit  $n$  Dimensionen. Es bestimmt eine Gleichung:

$$F(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$$

eine  $(n-1)$ fache Mannigfaltigkeit, die dem Symbole  $M_{n-1}$  bezeichne. Die durch lineare Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i = \text{Const.}$$

dargestellte  $M_{n-1}$  soll, wie gewöhnlich ebene Mannigfaltigkeit heissen, und insbesondere ich:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{dx_i} (x'_i - x_i) = 0$$

die ebene Tangential-Mannigfaltigkeit von wobei vorausgesetzt wird, dass die Coordinaten  $(x_i)$  ( $F=0$ ) genügen. Das Wort Configuration brauche ich um eine beliebige, unendliche Mannigfaltigkeit zu bezeichnen; spielsweise könnte man eine Curve eine Configuration, wie auch eine Linienfläche Geraden-Configuration nennen. In dem  $R_n$  wird eine Configuration durch  $(n-1)$  Gleichungen dargestellt, und wenn dieselben sind, geschieht dies am einfachsten folgenderweise:

$$\frac{x'_1 - x_1}{a_1} = \dots = \frac{x'_i - x_i}{a_i} = \dots = \frac{x'_n - x_n}{a_n}$$



dass die Orthogonalitäts-Beziehungen für jede orthogonale Transformation:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} x_i, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji} a_{ki} =$$

ungeändert bleiben.

2. Schneiden sich die beiden Normal-Configurationen, welche zwei unendlich benachbarte Elementen einer  $M_{n-1}$  entsprechen, so nehme ich die Richtung, die vom ersten Elemente zum benachbarten führt, eine Haupt-Richtung, und es lässt sich zeigen, dass von jedem Elemente im Allgemeinen ( $n$  - Haupt-Richtungen ausgehen. Differenziert man nemlich die Gleichung der Normal-Configuration, die ich folgenderweise schreibe

$$x_1' - x_1 = \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dx_n}} (x_n' - x_n), \quad x_i' - x_i = \frac{\frac{dF}{dx_i}}{\frac{dF}{dx_n}} (x_n' - x_n)$$

hinsichtlich aller  $(x_i)$ , indem die Grössen  $(x_i')$  constant betrachtet werden, so erhält man ( $n$  - Gleichungen:

$$f_{1i} dx_1 + f_{2i} dx_2 + \dots + f_{ni} dx_n = 0,$$

die hinsichtlich aller  $dx$  linear sind, welche ferner in linearer Weise die Grösse  $(x_n' - x_n)$  (den Coefficienten  $f$ ) enthalten. Die Elimination von allen  $dx$  zwischen diesen Gleichungen und der folgenden:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{dx_i} dx_i = 0$$





Configuration schneidet, die für alle  $(n-1)$   $M_{n-1}$ , welche dieselbe enthalten, eine Haupt-Configuration ist.

Nimmt man nemlich ein gemeinsames Element der  $n$  gewählten Mannigfaltigkeiten zum Coordinaten-Anfang und die zugehörigen ebenen Tangential-Mannigfaltigkeiten, welche paarweise orthogonal sind, zu Coordinaten-Mannigfaltigkeiten, so erhalten die Gleichungen unserer  $n$   $M_{n-1}$  die folgende Form:

$$x_j + \sum \sum a_{ik} x_i x_k + \dots = 0,$$

und es lässt sich zeigen <sup>1)</sup>, dass wenn jedesmal zwei von diesen  $M_{n-1}$  sich auch in benachbarten Elementen orthogonal schneiden sollen, so können die Coefficienten  $a_{ik}$  nur unter den Voraussetzungen:

$$i = k, j = i, j = k$$

von Null verschieden sein. Man wird somit auf die Form:

$$x_j + \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} b_i x_j x_i + \dots = 0,$$

oder wenn man bemerkt, dass  $x_j$  eine Grösse zweiter Ordnung ist, auf die folgende:

$$x_j + \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} x_i^2 + \dots = 0$$

geführt, und also ist unser Satz bewiesen.

<sup>1)</sup> Vergleiche: Salmon's Raumgeometrie (II, p. 51, der Uebersetzung von Fiedler), wie auch Kleins oben citirte Note.



Für eine jede Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$  die einem Orthogonal-Systeme angehört, ordnen sich nach dem Obenstehenden die Haupt-Configurationen auf eigenthümliche Weise. Es lässt sich nemlich eine solche  $M_{n-1}$  auf  $(n-1)$  Weisen in einfach unendlich viele  $M_{n-2}$  theilen, dergestalt dass jede  $M_{n-2}$   $(n-2)$  fach von Haupt-Configurationen der gegebenen Mannigfaltigkeit erzeugt wird. Ebenso theilt sich jede  $M_{n-2}$  auf  $(n-2)$  Weisen in einfach unendlich viele  $M_{n-3}$ , die jede  $(n-3)$  fach von Haupt-Configurationen erzeugt wird u. s. w.

Es lässt sich dieses folgenderweise aussprechen:  
Seien

$$(dx_1^{(1)}, dx_2^{(1)}, \dots dx_i^{(1)}), (dx_i^{(2)}), \dots (dx_i^{(n-1)})$$

die  $(n-1)$  Haupt-Richtungen einer  $M_{n-1}$ , welche einem Orthogonal-Systeme angehört. Es können alle  $(dx)$  als bekannte Funktionen von  $(x_1 \dots x_{n-1})$  betrachtet werden. Man bestimme  $(n-1)$  Grössen  $(X_i)$  durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i^{(1)} = 0, \dots \sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i^{(2)} = 0 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i^{(n-1)} = 0.$$

Es lässt sich alsdann der Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} X_i dx_i = 0$$

in der Form  $(\Phi(x_1 x_2 \dots x_{n-1}) = \text{Const})$  integrieren. Wenn umgekehrt die Haupt





$$y_i = \sum_{j=1}^{j=n+1} a_{ij} \eta_j, \quad \sum_{j=1}^{j=n+1} a_{ij}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{j=n+1} a_{ij} a_{kj} = 0,$$

beschränke, behaupte ich, dass dabei alle Kugeln, die einander in einem gemeinsamen Elemente berühren, in ebensolche übergehen. Die Berührungs-Bedingung:

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} (y_i' - y_i'')^2 = 0$$

transformirt sich nemlich in den entsprechenden Ausdruck:

$$\sum_{j=1}^{j=n+1} (\eta_j' - \eta_j'')^2 = 0;$$

benso gehen die Gleichungen:

$$\frac{y_1' - y_1''}{y_1' - y_1'''} = \dots = \frac{y_i' - y_i''}{y_i' - y_i'''} = \dots = \frac{y_{n+1}' - y_{n+1}''}{y_{n+1}' - y_{n+1}'''}$$

die folgenden:

$$\frac{\eta_1' - \eta_1''}{\eta_1' - \eta_1'''} = \dots = \frac{\eta_i' - \eta_i''}{\eta_i' - \eta_i'''} = \dots = \frac{\eta_{n+1}' - \eta_{n+1}''}{\eta_{n+1}' - \eta_{n+1}'''}$$

ber, und also ist meine Behauptung bewiesen.

Es lässt sich in Folge dessen die orthogonale Transformation des Raumes  $R_{n+1}$  als eine Transformation von  $R_n$  auffassen, und zwar haben die betreffenden Transformations-Gleichungen die folgende Form:

$$\xi_i = \Pi_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dx_n}{dx_1}, \frac{dx_n}{dx_2}, \dots, \frac{dx_n}{dx_n} \right)$$

In dieser Auffassung führt eine orthogonale Transformation des Raumes  $R_{n+1}$  eine im Raum  $R_n$  gegebene Mannigfaltigkeit:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

in eine neue über:

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0,$$

und hierbei entsprechen sich, wie ich sogleich beweisen werde, die Haupt-Configurationen der gegebenen und der transformirten Mannigfaltigkeit. Im Begriff der Kugeln, die  $(F=0)$  in zwei consecutiven Elementen berühren, das heisst die Haupt-Kugeln von  $F=0$ , gehen nemlich in die Haupt-Kugeln von  $\Phi=0$  über; es transformirt sich ferner eine jede continuirliche Aufeinanderfolge von Haupt-Kugeln, von denen immer zwei consecutive ein gemeinsames Berührungs-Element mit  $(F=0)$  haben, in Kugeln, welche zu  $(\Phi=0)$  in demselben Verhältniss stehen.

Man denke sich gegeben  $(n-1)$ -fach unendlich viele Kugeln, die durch zwei Relationen:

$$f_1(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0 \quad f_2(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = 0$$

definiert werden. Dieses Kugel-System bestimmt als Envelopp-Gebilde eine Mannigfaltigkeit  $M_n$  deren Gleichung:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

man findet, wenn man die Relationen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2 + y_{n+1}^2 = 0; \quad f_1 = 0; \quad f_2 = 0$$

hinsichtlich aller  $(y_i)$  differentiirt und dann diese Grössen eliminirt. Eine orthogonale Transformation von  $R_{n+1}$  führt unser Kugel-System



mit Vernachlässigung von Grössen dritter Ordnung folgenderweise schreiben:

$$F_i = y_i + \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{kk}^{(i)} y_k^2 + \dots = 0.$$

Die gemeinsamen Kugeln der beiden Mannigfaltigkeiten  $(F_1)$  und  $(F_{n+1})$  werden mit der genannten Genauigkeit durch die Gleichungen:

$$y_1 + \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k} y_k^2 + \dots = 0,$$

$$y_{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} a_{n+1,k} y_k^2 + \dots = 0$$

bestimmt, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass allen diesen Kugeln ein Envelopp-Gebilde entspricht, dessen Gleichung mit derselben Approximation die Form besitzt:

$$F = x - \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} x_i^2 + \dots = 0.$$

Es ergibt sich also, dass die Haupt-Richtungen von  $(F=0)$  in Elemente  $(x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0)$  mit denjenigen übereinstimmen, die unser Theorem angeht; und wenn man die früheren Betrachtungen berücksichtigt, sieht man, dass hiermit unser Satz bewiesen ist.

Die Haupt-Configurationen der Mannigfaltigkeit  $(F=0)$  haben, wie man leicht sieht, die früher besprochene Gruppierung und also giebt es im Raume  $R_n$  wenigstens ein Orthogonal-System, welches  $(F=0)$  enthält.





wie ich nun schreibe,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  <sup>1)</sup>). Die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=4} (x_i - y_i)^2 + y_5^2 = 0$$

stellt ein Kugel-System dar und zwar dasjenige welches ich in der eben citirten Abhandlung als einen linearen Kugel-Complex bezeichnet habe. Als Element des Raumes  $R_5$  wähle ich dieses Kugel-System und als Coordinaten die Grössen  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$  u. s. w.

Den vier Coordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  kann man auch, wie dieses aus der von mir untersuchten Abbildung <sup>2)</sup> des linearen Complexes auf den Punctraum hervorgeht, wie dies von einem andern Ausgangspunkte aus auch Herr Klein in der öfter citirten Note gethan hat, die Bedeutung von Linien-Coordinationen geben. Ein Element des Raumes  $R_n$  wird dann vermöge der genannten Abbildung der lineare Complex entsprechen, welches der Einführung des linearen Complexes als Raumelement, welche Herr Klein an einem andern Orte <sup>3)</sup> auseinandergesetzt hat.

8. Jacobi hat bekanntlich gezeigt, dass die einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten die durch die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^2}{a_i + \lambda} = 1$$

1) Vergleiche: »Ueber eine Classe geometrischer Transformationen« von Lie, Akademie zu Christiania, 1868 und 1871.

2) cf. Monatsberichte der Berliner Akademie. I 1870.

3) Math. Ann. t. II. Ueber die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinationen. Vergl. auch Pluecker, Neue Geometrie. n. 19.



überführt. Hierher gehören die orthogonale Transformation, wie auch eine, die der Transformation durch reciproke Radien entspricht.

b. Die besprochene Transformation lässt sich zugleich als eine Transformation des Raumes  $R_{n-1}$  auffassen und zwar erhalten wir in dieser Weise die allgemeinste Umwandlung dieses Raumes, die sich folgenderweise ausdrücken lässt:

$$\xi_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{dx_{n-1}}{dx_1}, \frac{dx_{n-1}}{dx_2}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_{n-2}})$$

und welche die Eigenschaft besitzt, Haupt-Configurationen des Raumes  $R_{n-1}$  in eben solche überzuführen.

c. Es lassen sich für den Raum  $R_n$  ( $n+2$ ) homogene Coordinaten, die eine Bedingungs-Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} x_i^2 = 0$$

befriedigen. anwenden. Die Bedingung für Orthogonalität zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ( $F=0$ ) und ( $\Phi=0$ ) drückt sich hierbei folgenderweise aus:

$$\sum_{i=1}^{i=n+2} \frac{dF}{dx_i} \frac{d\Phi}{dx_i} = \mu F + \nu \Phi.$$

Wenn  $n$  gleich drei ist, trifft man eine Coordinaten-Bestimmung des Punkt-Raums, die darauf zurückkommt, den Punkt durch seine Potenz hinsichtlich fünf paarweise orthogonaler Kugeln zu bestimmen. Wenn  $n$  gleich vier ist, so erhält man für die Plückersche Linien-Geometrie die von Herrn Klein eingeführte Coor-





$$\frac{X - x}{\cos \alpha} = \frac{Y - y}{\cos \beta} = \frac{Z - z}{\cos \gamma}$$

jede der beiden confocalen Flächen:

$$1) \quad \frac{X^2}{a^2 - p^2} + \frac{Y^2}{b^2 - p^2} + \frac{Z^2}{c^2 - p^2} = 1,$$

$$\frac{X^2}{a^2 - q^2} + \frac{Y^2}{b^2 - q^2} + \frac{Z^2}{c^2 - q^2} = 1,$$

so finden die beiden Gleichungen statt:

$$\left( \frac{x^2}{a^2 - p^2} + \frac{y^2}{b^2 - p^2} + \frac{z^2}{c^2 - p^2} - 1 \right)$$

$$\cdot \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2 - p^2} \right) =$$

$$2) \quad \left( \frac{x \cos \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - p^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - p^2} \right)^2,$$

$$\left( \frac{x^2}{a^2 - q^2} + \frac{y^2}{b^2 - q^2} + \frac{z^2}{c^2 - q^2} - 1 \right)$$

$$\cdot \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - q^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2 - q^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2 - q^2} \right) =$$

$$\left( \frac{x \cos \alpha}{a^2 - q^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - q^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - q^2} \right)^2.$$

Sieht man  $x, y, z$  als gegeben an, so ergeben sich die Werthe von  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  aus den Gleichungen 2) und der folgenden:

$$3) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Der Punkt  $(x, y, z)$  lässt sich als Durchschnitt dreier Flächen zweiten Grades ansehen, welche unter einander und zu den Flächen 1) confocal sind. Sind  $\lambda, \mu, \nu$  drei Variabele, so kann man setzen:

$$x^2 = \frac{(a^2 - \lambda^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

$$4) \quad y^2 = - \frac{(b^2 - \lambda^2)(b^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2 - \lambda^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)},$$

wo  $a > b > c > \lambda$ ,  $b > \mu > c$ ,  $a > \nu > b$ . Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$5) \quad \frac{x^2}{a^2 - p^2} + \frac{y^2}{b^2 - p^2} + \frac{z^2}{c^2 - p^2} = 1$$

$$= \frac{(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2)}{(a^2 - p^2)(b^2 - p^2)(c^2 - p^2)}$$

Zur Bestimmung von  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  setze man:

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - \lambda^2} = L,$$

$$6) \quad \frac{x \cos \alpha}{a^2 - \mu^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - \mu^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - \mu^2} = M,$$





$$L(\nu^2 - \mu^2)(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2) + mM(\nu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \nu^2) \\ + nN(\mu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \mu^2).$$

Die Gleichung 3) geht mittelst der Gleichungen 8), unter Berücksichtigung der Gleichungen 4) und 7), über in:

$$11) \quad lL^2(\nu^2 - \mu^2) + mM^2(\nu^2 - \lambda^2) + nN^2(\mu^2 - \lambda^2) = H.$$

Um den Ausdruck:

$$\left( \frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2 - p^2} \right) H^2$$

mittelst der Gleichungen 4) und 8) auf einfachste Art zu transformiren, nehme man zuerst den Factor von  $L^2(\nu^2 - \mu^2)^2$ . Mit Rücksicht auf den Werth von  $l$  lässt sich derselbe schreiben:

$$l^2 \left[ \frac{(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}{(a^2 - \lambda^2)(a^2 - p^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \frac{(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{(b^2 - \lambda^2)(b^2 - p^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \right. \\ \left. + \frac{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{(c^2 - \lambda^2)(c^2 - p^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]$$

Durch Zerlegung (hung auf  $a^2$  in Partihende Ausdruck über

$$\frac{l^2(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - p^2)(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)} \\ = -l \frac{(\lambda^2 - \mu^2)}{(\lambda^2 - p^2)}$$

Auf ähnliche Art lassen sich die Factoren von  $M^2(\nu^2 - \lambda^2)^2$  und  $N^2(\mu^2 - \lambda^2)^2$  darstellen. Mit Rücksicht auf die Werthe von  $l$  und  $m$  aus 9) ist der Factor von  $2LM(\mu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \lambda^2)$  gleich

$$\frac{lm(p^2 - \nu^2)}{(a^2 - p^2)(b^2 - p^2)(c^2 - p^2)}$$

Man findet so mittelst der Gleichungen 7):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2 - p^2} \right) H^2 = \\ & -H \left[ \frac{lL^2(\nu^2 - \mu^2)}{p^2 - \lambda^2} + \frac{mM^2(\nu^2 - \lambda^2)}{p^2 - \mu^2} + \frac{nN^2(\mu^2 - \lambda^2)}{p^2 - \nu^2} \right] \\ & [lL(\nu^2 - \mu^2)(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2) + mM(\nu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \nu^2) \\ & + nN(\mu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \mu^2)]^2 \\ & + \frac{[lL(\nu^2 - \mu^2)(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2) + mM(\nu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \nu^2) \\ & + nN(\mu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \mu^2)]^2}{(a^2 - p^2)(b^2 - p^2)(c^2 - p^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2)}. \end{aligned}$$

Durch die vorstehende Gleichung, die Gleichungen 5) und 10). geht die erste Gleichung 2) über in:

$$\begin{aligned} & lL^2(\nu^2 - \mu^2)(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2) + mM^2(\nu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \nu^2) \\ & + nN^2(\mu^2 - \lambda^2)(p^2 - \lambda^2)(p^2 - \mu^2) = 0. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von  $p$  mit  $q$  folgt:

$$\begin{aligned} & lL^2(\nu^2 - \mu^2)(q^2 - \mu^2)(q^2 - \nu^2) + mM^2(\nu^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)(q^2 - \nu^2) \\ & + nN^2(\mu^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)(q^2 - \mu^2) = 0. \end{aligned}$$

Aus der vorstehenden Gleichung, den Gleichungen

chungen 11) und 12) findet man, mit Rücksicht auf den Werth von  $H$  aus 7):

$$lL^2 = (p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$$

$$13) \quad -mM^2 = (p^2 - \mu^2)(q^2 - \mu^2)$$

$$nN = (p^2 - \nu^2)(q^2 - \nu^2)$$

Die Quantitäten  $l, m, n$  sind nach 9) wesentlich positiv. Nimmt man  $q > p$ , so geben die Gleichungen 13) nur dann für  $L, M, N$  reelle Werthe, wenn die Bedingungen stattfinden:

$$\mu > p > \lambda, \quad \nu > q > \lambda.$$

Durch Substitution der Werthe von  $l, m$ , aus 9) in 13) folgt:

$$L^2 = \frac{(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)}{(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)},$$

$$14) \quad M^2 = \frac{(\mu^2 - p^2)(q^2 - \mu^2)}{(a^2 - \mu^2)(b^2 - \mu^2)(\mu^2 - c^2)},$$

$$N^2 = \frac{(\nu^2 - p^2)(\nu^2 - q^2)}{(a^2 - \nu^2)(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)},$$

durch welche Gleichungen  $L, M, N$  bestimmt sind. Die Gleichung:

$$\cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz = 0$$

geht mittelst der Gleichungen 4) und 8) über in:

$$L\lambda d\lambda + M\mu d\mu + N\nu d\nu = 0.$$

Da die linke Seite der Bedingung der Integrabilität genügt, so können  $\alpha, \beta, \gamma$  als die Winkel angesehen werden, welche die Normale im Punkte  $(x, y, z)$  einer Fläche mit den Coordinatenachsen bildet, d. h. der Fläche, welche die beiden Flächen 1) zu Flächen der Krümmungsmittelpunkte hat.

Man setze zur Abkürzung:

$$\frac{x^2}{a^2 - p^2} + \frac{y^2}{b^2 - p^2} + \frac{z^2}{c^2 - p^2} = P,$$

$$5) \quad \frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2 - p^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2 - p^2} = P_2,$$

$$\frac{x \cos \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - p^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - p^2} = P_1.$$

Wird  $q$  statt  $p$  gesetzt, so mögen  $P, P_1, P_2$  übergehen in  $Q, Q_1, Q_2$ . In den Gleichungen:

$$PP_2 - P_1^2 = 0, QQ_2 - Q_1^2 = 0, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

sehe man  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, x, y, z$  als Functionen einer Variablen  $t$  an. Die erste Gleichung nach  $t$  differentiirt giebt, wegen 15):

$$\begin{aligned} & \frac{P \cos \alpha - P_1 x d \cos \alpha}{a^2 - p^2} \frac{dt}{dt} + \frac{P \cos \beta - P_1 y d \cos \beta}{b^2 - p^2} \frac{dt}{dt} + \frac{P \cos \gamma - P_1 z d \cos \gamma}{c^2 - p^2} \frac{dt}{dt} \\ &= \frac{P_1 \cos \alpha - P_2 x dx}{a^2 - p^2} \frac{dt}{dt} + \frac{P_1 \cos \beta - P_2 y dy}{b^2 - p^2} \frac{dt}{dt} + \frac{P_1 \cos \gamma - P_2 z dz}{c^2 - p^2} \frac{dt}{dt} \end{aligned}$$

Setzt man rechts  $P_2 = \frac{P_1^2}{P}$ , so folgt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{P \cos \alpha - P_1 x}{a^2 - p^2} \frac{d \cos \alpha}{dt} + \frac{P \cos \beta - P_1 y}{b^2 - p^2} \frac{d \cos \beta}{dt} + \frac{P \cos \gamma - P_1 z}{c^2 - p^2} \frac{d \cos \gamma}{dt} \\
 16) & = \frac{P_1}{P} \left[ \frac{P \cos \alpha - P_1 x}{a^2 - p^2} \frac{dx}{dt} + \frac{P \cos \beta - P_1 y}{b^2 - p^2} \frac{dy}{dt} + \frac{P \cos \gamma - P_1 z}{c^2 - p^2} \frac{dz}{dt} \right]
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche ist:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ d \cos \alpha & d \cos \beta & d \cos \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Für die Fläche bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos \alpha \, dx + \cos \beta \, dy + \cos \gamma \, dz = 0,$$

multiplicire man die obige Determinante mit:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{P \cos \alpha - P_1 x}{a^2 - p^2} & \frac{P \cos \beta - P_1 y}{b^2 - p^2} & \frac{P \cos \gamma - P_1 z}{c^2 - p^2} \\ \frac{Q \cos \alpha - Q_1 x}{a^2 - q^2} & \frac{Q \cos \beta - Q_1 y}{b^2 - q^2} & \frac{Q \cos \gamma - Q_1 z}{c^2 - q^2} \end{vmatrix} = \Delta$$

Das Product der beiden Determinanten reducirt sich auf zwei Factoren, welche verschwinden müssen. Wegen der Gleichung 16) und einer analogen Gleichung, erhält man zur Bestimmung der Krümmungslinien die Gleichungen:

$$\frac{P \cos \alpha - P_1 x}{a^2 - p^2} dx + \frac{P \cos \beta - P_1 y}{b^2 - p^2} dy + \frac{P \cos \gamma - P_1 z}{c^2 - p^2} dz = 0,$$

$$\frac{Q \cos \alpha - Q_1 x}{a^2 - q^2} dx + \frac{Q \cos \beta - Q_1 y}{b^2 - q^2} dy + \frac{Q \cos \gamma - Q_1 z}{c^2 - q^2} dz = 0.$$

Führt man  $\lambda, \mu, \nu$  statt  $x, y, z$  mittelst der Gleichungen 4) als Variable ein, so ist in der ersten Gleichung 17) der Factor von  $\lambda d\lambda$  gleich:

$$\begin{aligned} & \frac{P \cos \alpha - P_1 x}{a^2 - p^2} \frac{x}{a^2 - \lambda^2} + \frac{P \cos \beta - P_1 y}{b^2 - p^2} \frac{y}{b^2 - \lambda^2} \\ & + \frac{P \cos \gamma - P_1 z}{c^2 - p^2} \frac{z}{c^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^2 - \lambda^2} \left[ P \left( \frac{x \cos \alpha}{a^2 - p^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - p^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - p^2} \right) \right. \\ & \quad - P_1 \left( \frac{x^2}{a^2 - p^2} + \frac{y^2}{b^2 - p^2} + \frac{z^2}{c^2 - p^2} - 1 \right) \\ & \quad - P \left( \frac{x \cos \alpha}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y \cos \beta}{b^2 - p^2} + \frac{z \cos \gamma}{c^2 - p^2} \right) \\ & \quad \left. + P_1 \left( \frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Summe der beiden ersten Terme verschwindet nach 15), ebenso verschwindet der vierte Term nach 4), mit Rücksicht auf 6) reducirt sich die obige Summe einfach auf:

$$\frac{-P L}{p^2 - \lambda^2}.$$

Analoge Formen haben die Factoren von  $\mu d\mu$  und  $\nu d\nu$ . Man findet so, dass die Gleichungen 17) übergehen in:

$$\frac{L}{p^2 - \lambda^2} \lambda d\lambda + \frac{M}{p^2 - \mu^2} \mu d\mu + \frac{N}{p^2 - \nu^2} \nu d\nu = 0,$$

$$\frac{L}{q^2 - \lambda^2} \lambda d\lambda + \frac{M}{q^2 - \mu^2} \mu d\mu + \frac{N}{q^2 - \nu^2} \nu d\nu = 0,$$

durch welche Gleichungen die Krümmungslinien der Fläche:

$$\cos \alpha \, dx + \cos \beta \, dy + \cos \gamma \, dz = 0$$

bestimmt sind.

Multiplicirt man die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{d \cos \alpha}{dx} - \frac{1}{R}, & \frac{d \cos \beta}{dx}, & \frac{d \cos \gamma}{dx} \\ \frac{d \cos \alpha}{dy}, & \frac{d \cos \beta}{dy} - \frac{1}{R}, & \frac{d \cos \gamma}{dy} \\ \frac{d \cos \alpha}{dz}, & \frac{d \cos \beta}{dz}, & \frac{d \cos \gamma}{dz} - \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante  $\Delta$ , so ist das Product nach 16) gleich:

$$- \frac{\Delta}{R} \left( \frac{P_1}{P} - \frac{1}{R} \right) \left( \frac{Q_1}{Q} - \frac{1}{R} \right).$$

Hieraus folgt, dass die Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte  $(x, y, z)$  die Werthe haben:

$$\frac{P}{P_1} \text{ und } \frac{Q}{Q_1}.$$

Eine ganz analoge Rechnung ergibt sich, wenn man statt der confocalen Flächen 1) zwei Paraboloiden nimmt, da die Ausführung nur wenig von der vorhergehenden verschieden ist, so soll dieselbe nur kurz angedeutet werden. Werden die beiden Paraboloiden:

$$18) \frac{X^2}{a-p} + \frac{Y^2}{b-p} = 2Z-p, \quad \frac{X^2}{a-q} + \frac{Y^2}{b-q} = 2Z-q,$$

von der Graden:

$$\frac{X-x}{\cos \alpha} = \frac{Y-y}{\cos \beta} = \frac{Z-z}{\cos \gamma}$$

berührt, so ist:

$$\left( \frac{x^2}{a-p} + \frac{y^2}{b-p} - 2z + p \right) \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a-p} + \frac{\cos^2 \beta}{b-p} \right) =$$

$$\left( \frac{x \cos \alpha}{a-p} + \frac{y \cos \beta}{b-p} - \cos \gamma \right)^2$$

$$\left( \frac{x^2}{a-q} + \frac{y^2}{b-q} - 2z + q \right) \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a-q} + \frac{\cos^2 \beta}{b-q} \right) =$$

$$\left( \frac{x \cos \alpha}{a-q} + \frac{y \cos \beta}{b-q} - \cos \gamma \right)^2$$

Man sehe den Punct  $(x, y, z)$  als Durchschnitt dreier Paraboloiden an und setze:



$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 2x - \lambda, \quad a > b > \lambda,$$

$$\frac{x^2}{a-\mu} + \frac{y^2}{b-\mu} = 2x - \mu, \quad a > \mu > b.$$

$$\frac{x^2}{a-\nu} + \frac{y^2}{b-\nu} = 2x - \nu, \quad \nu > a,$$

oder:

$$x^2 = - \frac{(a-\lambda)(a-\mu)(a-\nu)}{a-b}$$

$$20) \quad y^2 = \frac{(b-\lambda)(b-\mu)(b-\nu)}{a-b},$$

$$2x = \lambda + \mu + \nu - a - b.$$

Es ist dann:

$$\frac{x^2}{a-p} + \frac{y^2}{b-p} - 2x + p = \frac{(p-\lambda)(p-\mu)(p-\nu)}{(a-p)(b-p)}$$

Nimmt man:

$$\frac{x \cos \alpha}{a-\lambda} + \frac{y \cos \beta}{b-\lambda} - \cos \gamma = L, \quad (a-\lambda)(b-\lambda) = l,$$

$$\frac{x \cos \alpha}{a-\mu} + \frac{y \cos \beta}{b-\mu} - \cos \gamma = M, \quad (a-\mu)(b-\mu) = -m,$$

$$\frac{x \cos \alpha}{a-\nu} + \frac{y \cos \beta}{b-\nu} - \cos \gamma = N, \quad (a-\nu)(b-\nu) = n,$$

und:

$$H = (\mu - \lambda) (\nu - \lambda) (\nu - \mu)$$

entwickelt die Werthe von  $x \cos \alpha$ ,  $y \cos \beta$  und  $\cos \gamma$  aus 21), so findet man mittelst derselben:

$$\left( \frac{x \cos \alpha}{a - p} + \frac{y \cos \beta}{b - p} - \cos \gamma \right) (a - p) (b - p) H' =$$

$$L(\nu - \mu) (p - \mu) (p - \nu) + mM(\nu - \lambda) (p - \lambda) (p - \nu) \\ + nN(\mu - \lambda) (p - \lambda) (p - \mu).$$

In :

$$\left( \frac{\cos^2 \alpha}{a - p} + \frac{\cos^2 \beta}{b - p} \right) H^2$$

ist der Factor  $L^2(\nu - \mu)^2$  gleich:

$$\left[ -\frac{(a - \mu) (a - \nu)}{(a - \lambda) (a - p)} + \frac{(b - \mu) (b - \nu)}{(b - \lambda) (b - p)} \right] \frac{l^2}{a - b}.$$

Zerlegt man den ersten Term in Beziehung auf  $a$ , den zweiten in Beziehung auf  $b$  in Partialbrüche, so geht der obige Ausdruck über in:

$$\frac{l \cdot (\lambda - \mu) (\lambda - \nu)}{\lambda - p} + \frac{l^2 (p - \mu) (p - \nu)}{(p - \lambda) (a - p) (b - p)}.$$

Mit Hülfe dieser Betrachtungen findet man:

$$\left( \frac{\cos^2 \alpha}{a - p} + \frac{\cos^2 \beta}{b - p} \right) H^2 =$$

$$- H \left[ \frac{lL^2(\nu - \mu)}{p - \lambda} + \frac{mM^2(\nu - \lambda)}{p - \mu} + \frac{nN^2(\mu - \lambda)}{p - \nu} \right]$$

$$+ \frac{[L(\nu - \mu)(p - \mu)(p - \nu) + M(\nu - \lambda)(p - \lambda)(p - \nu) + N(\mu - \lambda)(p - \lambda)(p - \mu)]^2}{(a - p)(b - p)(p - \lambda)(p - \mu)(p - \nu)}.$$

Mittelst der Gleichungen 20) und 21) gehen die Gleichungen 19) und  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  über in:

$$lL^2(\nu - \mu)(p - \mu)(p - \nu) + mM^2(\nu - \lambda)(p - \lambda)(p - \nu) + nN^2(\mu - \lambda)(p - \lambda)(p - \mu) = 0,$$

$$lL^2(\nu - \mu)(q - \mu)(q - \nu) + mM^2(\nu - \lambda)(q - \lambda)(q - \nu) + nN^2(\mu - \lambda)(q - \lambda)(q - \mu) = 0,$$

$$lL^2(\nu - \mu) + mM^2(\nu - \lambda) + nN^2(\mu - \lambda) = (\mu - \lambda)(\nu - \lambda)(\nu - \mu).$$

Mit Rücksicht auf die Werthe von  $l, m, n$  folgt:

$$L^2 = \frac{(p - \lambda)(q - \lambda)}{(a - \lambda)(b - \lambda)},$$

$$22) \quad M^2 = \frac{(p - \mu)(\mu - q)}{(a - \mu)(\mu - b)},$$

$$N^2 = \frac{(\nu - p)(\nu - q)}{(\nu - a)(\nu - b)},$$

wenn  $q > p$  genommen wird.

Mittelst der Gleichungen 20) und 21) geht die Gleichung:





endlich  $S$  ist eine beliebige Function von  $s$ . Für eine beliebige Function  $V$  von  $v$  sind die successiven Derivirten durch  $V'$ ,  $V''$  u. s. w. bezeichnet. Das erwähnte System von Gleichungen ist dann folgendes:

$$2) \begin{cases} x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = S \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \int \frac{S}{\varrho} ds + V' \cos v + V \sin v, \\ x \cos l + y \cos m + z \cos n = \int \frac{S}{r} ds + V' \sin v - V \cos v. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben:

$$\pm \cos a = \cos l \cos v - \cos \alpha \sin v,$$

$$\pm \cos b = \cos m \cos v - \cos \beta \sin v,$$

$$\pm \cos c = \cos n \cos v - \cos \gamma \sin v.$$

$$\mp r' \left( \frac{\cos v}{r} - \frac{\sin v}{\varrho} \right) = S' + \frac{1}{\varrho} \int \frac{S}{\varrho} ds$$

$$+ \frac{1}{r} \int \frac{S}{r} ds + \frac{V' \cos v + V \sin v}{\varrho} + \frac{V' \sin v - V \cos v}{r}$$

$$\pm r'' = V'' + V.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen und der Gleichungen 2) lassen sich die Werthe von  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  in Function von  $s$  und  $v$  darstellen. Es genügt nur je eine der Coordinaten zu entwickeln. Man findet so:

$$3) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= S \cos \lambda - \varrho \frac{dS}{ds} \cos \alpha + \frac{\frac{\cos \alpha}{r} - \frac{\cos l}{\varrho}}{\frac{\cos v}{r} - \frac{\sin v}{\varrho}} \\ T &= V' + \cos v \int \frac{S}{\varrho} ds + \sin v \int \frac{S}{r} ds + \varrho \frac{dS}{ds} \cos \alpha \end{aligned} \right.$$

$$4) \quad x_2 = S \cos \lambda + \cos \alpha \int \frac{S}{\varrho} ds + \cos l \int \frac{S}{r} ds \\ - (V'' \sin v - V' \cos v) \cos \alpha + (V'' \cos v + V' \sin v) \cos l$$

Die Gleichung 3) zeigt unmittelbar, dass der Punct  $(x_1, y_1, z_1)$  auf einer developpablen Fläche liegt, ist dieselbe eine Kegelfläche, welche zur Spitze den Anfangspunct der Coordinaten hat, so ist  $S = 0$ , ist die developpabele Fläche cylindrisch, ihre berührenden Ebenen der  $s$ -Achse parallel, so hat man:

$$\frac{dx_1}{ds} \frac{dy_1}{dv} - \frac{dy_1}{ds} \frac{dx_1}{dv} = 0$$

d. i.  $\cos v = 0$ . Die Curve, deren Elemente den Gleichungen 2) zu Grunde gelegt sind, ist dann die Helix einer cylindrischen Fläche oder einfach eine plane Curve. Ist  $u$  eine beliebige Function von  $s$ , ferner  $U$  eine beliebige Function von  $u$ ,  $\frac{dU}{du} = U'$ , bedeutet  $g$  eine Constante, so ist für eine Helix:

$$\cos u = \sin g, \cos l = \cos u \cos g, \cos \lambda = - \sin$$

$$\cos \beta = \sin u \sin g, \quad \cos m = \sin u \cos g, \quad \cos \mu = \cos u,$$

$$\cos \gamma = \cos g, \quad \cos n = -\sin g, \quad \cos \nu = 0.$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{ds}{du} = \sin g, \quad \frac{1}{r} \frac{ds}{du} = \cos g.$$

Nimmt man in den Gleichungen 2)  $S = U$ ,  
so gehen dieselben mittelst der vorstehenden Gleichungen über in:

$$-x \sin u + y \cos u = U'$$

$$x \cos u + y \sin u = U + V' \sin(v + g)$$

$$-V \cos(v + g),$$

$$z = V' \cos(v + g) + V \sin(v + g).$$

Man kann unbeschadet der Allgemeinheit immer  $g = 90^\circ$  nehmen. Ist also in den Gleichungen 2)  $\frac{\varrho}{r}$  constant, so lassen sich diese Gleichungen ersetzen durch:

$$-x \sin u + y \cos u = U'$$

$$x \cos u + y \sin u = U + V' \cos v + V \sin v,$$

$$-z = V' \sin v - V \cos v.$$

Da  $\varrho \frac{dS}{ds} = \varrho \frac{du}{ds} \frac{dS}{du} = U''$  für  $\sin g = 1$ , so  
setzt man:

$$-x_1 = U'' \cos u + U' \sin u, \quad -y_1 = U'' \sin u - U' \cos u.$$



Soll in den Gleichungen 1) der Punct  $(x_1, y_1, z_1)$  auf einer Kugelfläche liegen, so ergeben sich wieder die Gleichungen 2) mit den specielleren Bestimmungen:  $S = 0$  und  $V'' = 0$ , oder  $V$  constant, welcher constante Werth gleich dem Halbmesser der Kugelfläche ist.

Die Gleichungen 5) und 6) geben noch zu folgenden Bemerkungen Veranlassung. Setzt man:

$$7) \quad \xi = U \cos u - U' \sin u, \quad \eta = U' \cos u + U \sin u$$

so lassen sich die Gleichungen 5) ersetzen durch:

$$z = F[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2],$$

$$0 = (x - \xi) \frac{d\xi}{du} + (y - \eta) \frac{d\eta}{du} = 0,$$

wo  $F$  eine beliebiges Functionszeichen ist. Hieraus folgt, dass die Fläche, bestimmt durch die Gleichungen 5), die Enveloppe einer Rotationsfläche ist, für welche ein fester Punct der Rotationsaxe eine beliebige plane Curve beschreibt, deren Ebene zur Richtung der Axe senkrecht ist. Sieht man in 6) und 7)  $(x_1, y_1)$  und  $(\xi, \eta)$  als Coordinaten der entsprechenden Puncte zweier Curven an, so ist die Curve, bestimmt durch die Gleichungen 6) die Evolute der Curve bestimmt durch die Gleichungen 7). Das Problem also zu einer gegebenen cylindrischen Fläche als Fläche der Krümmungsmittelpuncte die primitive Fläche zu finden reducirt sich einfach auf die Bestimmung der orthogonalen Trajectorien der Tangenten einer planen Curve, d. h. der planen Curve in welcher die cylindrische Fläche durch eine Ebene geschnitten wird, welche zu ihren

Generatricen senkrecht ist. Setzt man zur Abkürzung:

$$8) \quad \frac{\varrho}{r} = p,$$

so erhält man aus 3) und zwei analogen Gleichungen:

$$x_1 = V' \frac{p \cos \alpha - \cos l}{p \cos v - \sin v}, \quad y_1 = V' \frac{p \cos \beta - \cos m}{p \cos v - \sin v}$$

$$z_1 = V' \frac{p \cos \gamma - \cos n}{p \cos v - \sin v}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Flächen finden, für welche eine der Schalen der Krümmungsmittelpunkte eine Kegelfläche zweiten Grades ist. Sei:

$$\frac{x_1^2}{f^2} + \frac{y_1^2}{g^2} - \frac{z_1^2}{h^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{(p \cos \alpha - \cos l)^2}{f^2} + \frac{(p \cos \beta - \cos m)^2}{g^2} - \frac{(p \cos \gamma - \cos n)^2}{h^2} = 0.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach  $s$ , so erhält man ein Product von zwei Factoren, welches verschwindet. Der eine Factor  $\frac{dp}{ds}$  kann

nicht verschwinden, sonst wäre nach 8)  $\frac{\varrho}{r}$  constant, diesem Falle entspricht eine Cylinderfläche, welche sich einfach auf eine Gerade redu-

cirt. Lässt man also den andern Factor schwinden so ergibt sich folgende Gleichung

$$\frac{(p \cos \alpha - \cos l) \cos \alpha}{f^2} + \frac{(p \cos \beta - \cos m) \cos \beta}{g^2} - \frac{(p \cos \gamma - \cos n) \cos \gamma}{h^2} = 0.$$

Bedeutet  $q$  eine näher zu bestimmende Function, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen ersetzen durch:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{f^2} + \frac{\cos^2 \beta}{g^2} - \frac{\cos^2 \gamma}{h^2} = q.$$

$$9) \frac{\cos \alpha \cos l}{f^2} + \frac{\cos \beta \cos m}{g^2} - \frac{\cos \gamma \cos n}{h^2} = 1$$

$$\frac{\cos^2 l}{f^2} + \frac{\cos^2 m}{g^2} - \frac{\cos^2 n}{h^2} = p^2 q.$$

Die beiden ersten Gleichungen 9) differenzirt man nach  $s$ . Führt man statt  $s$  eine unabhängige Variable  $t$  mittelst der Gleichung

$$10) \quad \frac{1}{q} \frac{ds}{dt} = 1$$

ein und setzt  $\frac{dp}{dt} = p'$  etc., so folgt:

$$11) \frac{\cos \alpha \cos l}{f^2} + \frac{\cos \beta \cos \mu}{g^2} - \frac{\cos \gamma \cos \nu}{h^2} =$$

$$\frac{\cos \lambda}{f^2} + \frac{\cos m \cos \mu}{g^2} - \frac{\cos n \cos \nu}{h^2} = qp' + \frac{1}{2}pq'.$$

Die dritte Gleichung 9) nach  $t$  differentiirt auf keine neue Gleichung. Die beiden Gleichungen 11) nach  $t$  differentiirt geben, mit Rücksicht auf 8), 9) und 10):

$$\frac{\cos^2 \lambda}{f^2} + \frac{\cos^2 \mu}{g^2} - \frac{\cos^2 \nu}{h^2} = \frac{1}{2}q'' + q(1 + p^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \lambda}{f^2} + \frac{\cos^2 \mu}{g^2} - \frac{\cos^2 \nu}{h^2} &= q(1 + p^2) \\ &+ \frac{1}{p} \frac{d(qp' + \frac{1}{2}pq')}{dt}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass  $(\cos^2 \lambda / f^2 + \cos^2 \mu / g^2 - \cos^2 \nu / h^2)^2$  constant ist. Zu diesem Resultat nebst Bestimmung des constanten Werthes gelangt man leicht auf folgende Weise. Das Product der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha, & \cos \beta, & \cos \gamma \\ \cos \lambda, & \cos \mu, & \cos \nu \\ \cos l, & \cos m, & \cos n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos \alpha}{f^2}, & \frac{\cos \beta}{g^2}, & -\frac{\cos \gamma}{h^2} \\ \frac{\cos \lambda}{f^2}, & \frac{\cos \mu}{g^2}, & -\frac{\cos \nu}{h^2} \\ \frac{\cos l}{f^2}, & \frac{\cos m}{g^2}, & -\frac{\cos n}{h^2} \end{vmatrix}$$

ist gleich dem Quadrat der ersten Determinante multiplicirt mit  $-\frac{1}{(fgh)^2}$  d. h. einfach gleich

$-\frac{1}{(fgh)^2}$ . Dasselbe Product ist aber auch in Folge der Gleichungen 9), 11) und 12) gleich:  $-q(qp')^2$ . Es ist also:

$$13) \quad q(qp')^2 = \frac{1}{(fgh)^2}.$$

Die erste und dritte Gleichung 9) zur Gleichung 12) addirt geben:

$$14) \quad \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} - \frac{1}{h^2} = 2q(1 + p^2) + \frac{1}{2}q''.$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der Gleichung 13) lässt sich durch Integration eine neue Relation zwischen  $p, q, p', q'$  herleiten, welche man indessen einfacher auf folgende Art erhält. Sieht man in den Gleichungen:

$$\frac{\cos \alpha \cos \alpha}{f^2} + \frac{\cos \beta \cos \beta}{g^2} - \frac{\cos \gamma \cos \gamma}{h^2} = q,$$

$$\frac{\cos l \cos \alpha}{f^2} + \frac{\cos m \cos \beta}{g^2} - \frac{\cos n \cos \gamma}{h^2} = pq,$$

$$\frac{\cos \lambda \cos \alpha}{f^2} + \frac{\cos \mu \cos \beta}{g^2} - \frac{\cos \nu \cos \gamma}{h^2} = \frac{1}{2}q'.$$

$$\frac{\cos \alpha}{f^2}, \frac{\cos \beta}{g^2}, -\frac{\cos \gamma}{h^2} \text{ als Unbekannte an, so folgt:}$$

$$(q - \frac{1}{f^2}) \cos \alpha + pq \cos l + \frac{1}{2} q' \cos \lambda = 0.$$

Auf diese Art erhält man aus den Gleichungen 9), 11) und 12) die folgenden:

$$(q - \frac{1}{f^2}) \cos \alpha + pq \cos l + \frac{1}{2} q' \cos \lambda = 0,$$

$$pq \cos \alpha + (p^2 q - \frac{1}{f^2}) \cos l + (qp' + \frac{1}{2} pq') \cos \lambda = 0,$$

$$\frac{1}{2} q' \cos \alpha + (qp' + \frac{1}{2} pq') \cos l$$

$$+ [\frac{1}{2} q'' + q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}] \cos \lambda = 0$$

Durch Vertauschung von  $\alpha, l, \lambda, f^2$  mit  $\beta, m, n, g^2$  und  $\gamma, n, \nu, -h^2$  ergeben sich aus 15) nach sechs weitere Gleichungen. Die Gleichungen 15) geben:

$$\frac{1}{f^2} [\frac{1}{2} q'' + q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}] [q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}]$$

$$+ q(qp')^2 = \frac{1}{f^2} (qp' + \frac{1}{2} pq')^2 + \frac{1}{f^2} (\frac{q'}{2})^2.$$

Setzt man links aus 13) für  $q(qp')^2$  und aus 14) für  $q''$  den entsprechenden Werth ein, so lässt sich die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

$$- [q(1 + p^2) - \frac{1}{f^2}] [q(1 + p^2) - \frac{1}{g^2}] [q(1 + p^2) + \frac{1}{h^2}]$$

$$+ \frac{1}{(fgh)^2} = q[(1+p^2)^{\frac{1}{2}} q' + pqp']^2 + q(qp')^2$$

d. i. nach 13):

$$\begin{aligned} & - [q(1+p^2) - \frac{1}{f^2}] [q(1+p^2) - \frac{1}{g^2}] [q(1+p^2) + \frac{1}{h^2}] \\ & = q \left[ \frac{dq(1+p^2)}{2dt} \right]^2 \end{aligned}$$

oder:

$$16) \quad q(1+p^2) = \frac{1}{T}$$

gesetzt:

$$\frac{\frac{1}{4} T^2}{-(f^2 - T)(g^2 - T)(h^2 + T)} = \frac{1}{q(fgh)^2}$$

Nun ist aber nach 13) und 16):

$$\frac{1}{q(fgh)^2} = (qp')^2 = \left( \frac{p'}{1+p^2} \frac{1}{T} \right)^2.$$

Nimmt man die Quadratwurzel negativ, so folgt:

$$-\frac{1}{2} T \sqrt{-\frac{T}{(f^2 - T)(g^2 - T)(h^2 + T)}} = \frac{p'}{1+p^2}$$

oder:

$$17) \quad p = \tanh w$$

gesetzt:

$$T \frac{dT}{dw}$$

$$18) \quad -\frac{1}{2} \sqrt{-T(f^2 - T)(g^2 - T)(h^2 + T)} = 1.$$

Sei nun  $f > g$ . Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$\frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{f^2 - g^2}{h^2 + g^2} = k^2, \quad \frac{f^2 - g^2}{h^2 + g^2} = k^2 \tan^2 \delta,$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

dann ist:

$$19) \left(\frac{f}{h}\right)^2 = \tan^2 \delta, \quad \left(\frac{g}{h}\right)^2 = \frac{k'^2 \sin^2 \delta}{1 - k'^2 \sin^2 \delta}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen und:

$$20) \quad \frac{T}{h^2} = \frac{\sin^2 \delta \cdot (1 - k^2 \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi}$$

geht die Gleichung 18) über in:

$$21) \frac{\sin \delta \cdot \cos \delta \cdot \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dw} = 1,$$

durch welche Gleichung  $\varphi$  in Function von  $w$ , oder  $w$  in Function von  $\varphi$  bestimmt ist. Aus 16), 17) und 20) folgt:

$$22) \quad qh^2 = \frac{\cos^2 w (\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \delta (1 - k^2 \sin^2 \varphi)}.$$

Die Gleichung 17) giebt:

$$\frac{dp}{dw} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{dw}$$

d. h.:

$$\frac{1}{\cos^2 w} = p' \frac{dt}{dw}.$$



Mittelst dieser Gleichung geht die Gleichung:

$$\frac{dq}{dw} = q' \frac{dt}{dw}$$

über in:

$$q' = p' \cos^2 w \frac{dq}{dw}.$$

Setzt man in die vorstehende Gleichung und die Gleichung 13) für  $p$ ,  $q$ ,  $f$ ,  $g$  ihre Werthe aus 17), 19) und 22), so folgt mit Rücksicht auf 21):

$$h^2 \cdot qp' \cdot k' \sin \delta \cdot \sqrt{H} =$$

$$\frac{\cos \delta}{\cos w} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$h^2 \frac{1}{2} q' \cdot k' \sin \delta \sqrt{H} = \frac{1}{2} \cos w \frac{1}{q} \frac{dq}{dw} \times$$

$$\cos \delta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$- \sin w \cos \delta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$+ \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \frac{\cos w}{\sin \delta},$$

$$h^2 (qp' + \frac{1}{2} pq') k' \sin \delta \cdot \sqrt{H} =$$

$$\cos w \cos \delta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$+ \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \frac{\sin w}{\sin \delta}$$

wo:

$$H = \cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen, der Gleichungen 15) und einiger analogen Relationen zu denselben lassen sich die Werthe von  $\cos \alpha$ ,  $\cos l$ ,  $\cos \lambda$  etc. berechnen. Das Detail der etwas weitläufigen Rechnung soll hier übergangen und zur vollständigen Lösung des Problems die Werthe der betreffenden Casinus aufgestellt werden.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi) (\cos^2 \delta + k^2 \sin^2 \delta \sin^2 \varphi) = D^2,$$

so finden folgende Gleichungen statt:

$$D \cdot \cos \alpha = \cos w \cos \varphi \cos \delta$$

$$+ \sin w \sin \varphi \sin \delta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta},$$

$$D \cdot \cos l = \sin w \cos \varphi \cos \delta$$

$$- \cos w \sin \varphi \sin \delta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta},$$

$$\cos \lambda \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = -k' \sin \varphi \cos \delta.$$

$$D \cdot \cos \beta = k' \cos w \sin \varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta}$$

$$- k' \sin w \sin \delta \cos \delta \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$D \cdot \cos m = k' \sin w \sin \varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta}$$

$$+ k' \cos w \sin \delta \cos \delta \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\cos \mu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \cos \varphi \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \delta},$$

$$D \cos \gamma = k^2 \cos w \sin \varphi \cos \varphi \sin \delta$$



$$3) \cos \gamma = \sin w \cos \delta, \cos n = -\cos w \cos \delta, \cos \nu = \sin \delta.$$

Die Gleichung:

$$\cos \alpha \cos \gamma + \cos l \cos n + \cos \lambda \cos \nu = 0,$$

wird:

$$(\cos \alpha \sin w - \cos l \cos w) \cos \delta + \cos \lambda \sin \delta = 0.$$

Diese Gleichung und die Gleichung  $\cos^2 \alpha + \cos^2 l + \cos^2 \lambda = 1$  lassen sich ersetzen durch:

$$\cos \alpha \sin w - \cos l \cos w = \sin \delta \sin \varphi,$$

$$\cos \lambda = -\cos \delta \cos \varphi,$$

$$\cos \alpha \cos w + \cos l \sin w = \cos \varphi,$$

oder:

$$\cos \alpha = \cos w \cos \varphi + \sin w \sin \delta \sin \varphi,$$

$$24) \cos l = \sin w \cos \varphi - \cos w \sin \delta \sin \varphi,$$

$$\cos \lambda = -\cos \delta \sin \varphi.$$

Wegen:

$$\text{st: } d \cos \alpha = \varrho \cos \lambda ds, \quad d \cos \gamma = \varrho \cos \nu ds$$

$$\frac{d \cos \alpha}{d \cos \gamma} = \frac{\cos \lambda}{\cos \nu}.$$

Mittelst der Gleichungen 23) und 24) geht die vorstehende Gleichung über in:

$$dw = \sin \delta \cdot d\varphi,$$

durch welche Gleichung der Zusammenhang zwischen  $w$  und  $\varphi$  bestimmt ist. Man findet leicht noch aus 23) und 24):

$$\cos \beta = \cos w \sin \varphi - \sin w \sin \delta \cos \varphi,$$

$$\cos m = \sin w \sin \varphi + \cos w \sin \delta \cos \varphi,$$

$$\cos \mu = \cos \delta \cos \varphi.$$

Durch die vorstehenden Systeme von Gleichungen sind die Flächen vollständig bestimmt, welche zu einer der Schalen der Krümmungstelpuncte die Fläche eines Kreiskegels haben.

#### Verbesserungen in Nr. 4.

S. 99,	Z. 3 v. o.	statt —	36.36	lies —	34
	Z. 14 v. o.	„	68.20	„	66
	Z. 17 v. o.	„	1.080	„	1.0
S.102,	Z. 11 v. u.	„	36.36	„	34

# Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

März und April 1871.

(Fortsetzung.)

Dr. F. C. Noll. Der zoologische Garten. Zeitschrift für Beobachtung, Pflege und Zucht der Thiere. XI. Jahrgang 1870. Nr. 7—12. Juli bis December. Frankfurt a/M. 8.

Monatsbericht der königl. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Januar, Februar, März 1871. 8.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XXIV. Heft IV. Leipzig. 1870. 8.

Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft. VI. Jahrgang. Heft I. Januar 1871. Leipzig. 8.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Neue Folge. Jahrgang XVII. Nr. 1—12. 1870. 4.

M. Stransky, Grundzüge zur Analyse der Molecularbewegung. I u. II. Brünn 1867 und 1871. 8.

Dr. theol. W. Haan, Mittheilungen des Geschichts- und Altherthums-Vereins zu Leisnig im Königr. Sachsen. Heft II. Leisnig 1871. 8.

Mittheilungen aus dem Archive des Voigtländischen alterthumsforschenden Vereins in Hohenleben nebst d. 40. Jahresbericht. 8.

Quetelet, Annales Météorologiques de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Cinquième année. Bruxelles 1871. 4.

Nature Nr. 70—78.

Von Maurer, Geschichte der Städteverfassung in Deutschland. Bd. 4. München 1871.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1870. Bd. XX. 8.







die hier beabsichtigten Betrachtungen geeignet sind, indem ich in Bezug auf weitere Umgestaltungen auf meine frühere Abhandlung verweise.

Es sei ein materieller Punct gegeben, welcher sich unter dem Einflusse einer gegebenen Kraft stationär in geschlossener Bahn bewegt. Die Masse des beweglichen Punctes sei  $m$ , seine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogenen Coordinaten seien  $x, y, z$ , die Componenten der auf in wirkenden Kraft  $X, Y, Z$ , seine Geschwindigkeit  $v$  und die Umlaufszeit  $i$ . Alle diese Grössen, mit Ausnahme der ersten und letzten, sind im Verlaufe der Bewegung veränderlich, aber jede hat für den ganzen Umlauf einen gewissen Mittelwerth. Einen solchen Mittelwerth wollen wir dadurch von der veränderlichen Grösse unterscheiden, dass wir über das Zeichen, welches die letztere darstellt, einen waagerechten Strich machen, so dass z. B.  $\bar{x}$  den Mittelwerth von  $x$  bedeutet.

Nun denken wir uns die ursprüngliche Bewegung durch eine andere, von ihr unendlich wenig verschiedene stationäre Bewegung ersetzt, welche in veränderter, aber ebenfalls geschlossener Bahn, mit veränderter Geschwindigkeit und unter dem Einflusse einer veränderten Kraft stattfinden kann. Indem wir diese beiden Bewegungen unter einander vergleichen, wollen wir den Unterschied zwischen einer auf die ursprüngliche Bewegung bezüglichen Grösse und der auf die veränderte Bewegung bezüglichen entsprechenden Grösse die Variation dieser Grösse nennen, und durch ein vorgesetztes  $\delta$  bezeichnen, so dass z. B.  $\delta i$  die Variation der Umlaufszeit  $i$  ist. Bei denjenigen Grössen, welche im Verlaufe jeder Bewegung veränderlich sind,





in dem Ergal enthaltene, während einer stationären Bewegung constante Grössen in den beiden stationären Bewegungen verschiedene Werthe haben. In einem solchen Falle muss natürlich bei der Bestimmung der Variation  $\delta U$  neben der Verschiedenheit der Coordinaten auch die Verschiedenheit der Constanten berücksichtigt werden.

Wir wollen nun aber annehmen, dass bei denjenigen beiden Bewegungen, welche wir gegenwärtig zu vergleichen haben, ein solcher Unterschied nicht vorkomme, sondern dass das Ergal bei beiden durch eine und dieselbe Function der Coordinaten mit unveränderten Constanten dargestellt werde. In diesem Falle ist die obige Summe die vollständige Variation des Ergals und kann mit  $\delta U$  bezeichnet werden, und demgemäss ist die linke Seite der Gleichung (2) der Mittelwerth der Variation des Ergals, oder, was dasselbe ist, die Variation des Mittelwerthes des Ergals, welche durch  $\delta \bar{U}$  dargestellt wird. Die Gleichung (2) geht also für diesen Fall über in:

$$(3) \quad \delta \bar{U} = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \log i.$$

Diese Gleichung wollen wir nun der Form nach noch etwas vereinfachen. Wir gestalten sie zunächst folgendermaassen um:

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} &= m \bar{v}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\delta \bar{v}^2}{\bar{v}^2} + \delta \log i \right) \\ &= m \bar{v}^2 \left( \frac{1}{2} \delta \log \bar{v}^2 + \delta \log i \right) \end{aligned}$$

$$\delta \bar{U} = m \bar{v}^2 \delta \log (i \sqrt{\bar{v}^2}).$$

Hierin wollen wir für das unter dem Logarithmus stehende Product ein einheitliches Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(4) \quad \lambda = i \sqrt{\bar{v}^2}.$$

Dann geht unsere Gleichung über in

$$(5) \quad \delta \bar{U} = m \bar{v}^2 \delta \log \lambda.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung eine Variation ist, muss auch die rechte Seite eine solche sein. Daraus folgt, dass  $m \bar{v}^2$  eine Function von  $\lambda$  ist, und demgemäss muss dann auch  $\bar{U}$  eine Function von  $\lambda$  sein. Für die letztere wollen wir zunächst ein beliebiges Functionszeichen einführen, indem wir setzen:

$$(6) \quad \bar{U} = f(\lambda).$$

Dann lässt sich auch die andere Function, welche  $m \bar{v}^2$  darstellt, sofort angeben. Es ist nämlich, wenn  $f'(\lambda)$  die erste Ableitung von  $f(\lambda)$  bedeutet,

$$\delta \bar{U} = f'(\lambda) \delta \lambda.$$

Wenn wir dieses Product in die Gleichung (5) einführen, und zugleich für die darin angedeutete Variation des Logarithmus ihren Werth setzen, so erhalten wir:

$$f'(\lambda) \delta\lambda = m\overline{v^2} \frac{\delta\lambda}{\lambda},$$

folgt:

$$m\overline{v^2} = \lambda f'(\lambda)$$

Wenn wir noch mit 2 dividiren:

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{1}{2} \lambda f'(\lambda).$$

Nun wollen wir aus (4) folgende Gleichung  
:

$$i = \frac{\lambda}{V \overline{v^2}}.$$

wir hierin für  $\overline{v^2}$  den Werth setzen,  
r sich aus der vorigen Gleichung ergibt,  
amt:

$$i = V \sqrt{\frac{m\lambda}{f'(\lambda)}}.$$

Endlich wollen wir noch eine vierte Grösse  
 $\lambda$  darstellen. Nach dem Satze von der  
Äquivalenz von lebendiger Kraft und mechani-  
Arbeit hat man die Gleichung:

$$U + \frac{m}{2} v^2 = E,$$

$E$  eine im Verlaufe der Bewegung con-  
stante Grösse ist, welche wir die Energie nen-

nen wollen. Wenn die Summe der beiden hier an der linken Seite stehenden veränderlichen Grössen während der ganzen Bewegung einen constanten Werth hat, so hat auch die Summe ihrer Mittelwerthe denselben Werth, und wir können daher schreiben:

$$E = \bar{U} + \frac{m}{2} \bar{v}^2.$$

Indem wir hierin die Ausdrücke aus (6) und (7) einsetzen, erhalten wir:

$$(9) \quad E = f(\lambda) + \frac{1}{2} \lambda f'(\lambda).$$

Wir können somit, sobald die Form der Function  $f(\lambda)$  bekannt ist, vermöge der vier Gleichungen (6), (7), (8) und (9) das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft, die Umlaufzeit und die Energie durch eine und dieselbe Grösse  $\lambda$  ausdrücken. Es versteht sich von selbst, dass wir auch aus je zweien dieser Gleichungen  $\lambda$  eliminiren und dadurch Beziehungen zwischen je zweien der vier genannten Grössen erhalten können. Denken wir uns dieses in der Weise ausgeführt, dass jede der drei ersten Gleichungen mit der letzten combinirt wird, so erhalten wir drei Gleichungen, welche das mittlere Ergal, die mittlere lebendige Kraft und die Umlaufzeit als Functionen der Energie bestimmen. Diese Bestimmungsart ist für die Anwendung insofern besonders bequem, als die Energie für jede Bewegung einen constanten Werth hat, welcher sich sofort angeben lässt, wenn nur für irgend eine Stellung des beweglichen Punctes seine Geschwindigkeit bekannt ist.

Es kommt nun nur noch darauf an, die





ziehungscentrum in einer Kreisbahn bewegt. Dann ist  $r$  constant, und wir brauchen daher nicht den Mittelwerth von  $F(r)$  zu nehmen, sondern können einfach schreiben:

$$(12) \quad F(r) = f(\lambda).$$

Ferner ist in diesem Falle auch die Geschwindigkeit constant, und wir können daher auch in der Gleichung (4) an die Stelle des Mittelwerthes  $\overline{v^2}$  einfach  $v^2$  setzen, wodurch sie übergeht in

$$\lambda = i \sqrt{v^2} = iv.$$

Nun ist aber bei constanter Geschwindigkeit das Product  $iv$  gleich der Bahnlänge, und da die Bahn in unserem Falle ein Kreis mit dem Radius  $r$  ist, so erhalten wir:

$$\lambda = 2\pi r$$

oder:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Dieses in die Gleichung (12) für  $r$  eingesetzt, giebt:

$$(13) \quad F\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f(\lambda).$$

Hierdurch ist die Function  $f(\lambda)$  bestimmt. Durch Differentiation nach  $\lambda$  erhalten wir ferner:

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi} F'\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f'(\lambda).$$

Einfachheit wegen wollen wir nun noch  
 eine Zeichen  $\varrho$  einführen mit der Bedeu-

$$\varrho = \frac{\lambda}{2\pi}$$

erhalten wir:

$$f(\lambda) = F(\varrho)$$

$$f'(\lambda) = \frac{1}{2\pi} F'(\varrho)$$

$$\lambda f'(\lambda) = \varrho F'(\varrho).$$

enden wir dieses auf die Gleichung (11),  
 an die Stelle von (6) getreten ist, und  
 die Gleichungen (7), (8) und (9) an, so gelan-  
 ge für den Fall, wo die wirksame Kraft  
 von einem festen Centrum ausgehende und  
 eine Function der Entfernung dargestellte  
 Anziehungskraft ist, zu folgenden Gleichungen:

$$\overline{F(r)} = F(\varrho)$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{1}{2} \varrho F'(\varrho)$$

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{m\varrho}{F'(\varrho)}}$$

$$E = F(\varrho) + \frac{1}{2} \varrho F'(\varrho),$$

alle vorkommenden Functionen bekannt

Als noch specielleren Fall wollen wir annehmen, die Anziehungskraft sei irgend einer positiven oder negativen Potenz der Entfernung proportional, wobei wir aber die minus erste Potenz ausnehmen wollen, welche bei der Integration zum Logarithmus führt, und daher besser besonders behandelt wird. Wir setzen also

$$(23) \quad F'(r) = kr^n,$$

worin  $k$  und  $n$  Constante sind, deren letztere von  $-1$  verschieden ist. Hieraus ergibt sich durch Integration:

$$(24) \quad F(r) = \frac{k}{n+1} r^{n+1}$$

und durch Anwendung dieser Functionsformen gehen die obigen vier Gleichungen über in:

$$(25) \quad \frac{k}{n+1} r^{n+1} = \frac{k}{n+1} q^{n+1}$$

$$(26) \quad \frac{m}{2} v^2 = \frac{k}{2} q^{n+1}$$

$$(27) \quad i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot q^{\frac{1-n}{2}}$$

$$(28) \quad E = k \frac{n+3}{2(n+1)} q^{n+1}.$$

Wenn man mittelst der letzten Gleichung aus drei ersten  $q$  eliminirt, so erhält man:

$$\frac{k}{n+1} \overline{r^{n+1}} = \frac{2}{n+3} E$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{n+1}{n+3} E$$

$$i = 2\pi m^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{n+1}} \left[ \frac{2(n+1)}{n+3} E \right]^{\frac{1-n}{2(n+1)}}.$$

1 endlich noch weiter zu specialisiren, wollen wir für  $n$  zwei bestimmte Werthe setzen, am häufigsten vorkommen.

erst soll angenommen werden, es sei  $n = 1$ .

Fall entspricht den einfachsten elastischen Bewegungsbewegungen, bei denen die Kraft, welcher ein Punct, der seine Gleichgewichtslage verlassen hat, nach dieser zurückgezogen proportional der Entfernung ist. Für diesen Fall gehen die vorigen Gleichungen über in:

$$\frac{k}{2} \overline{r^2} = \frac{k}{2} \overline{\varrho^2} = \frac{1}{2} E$$

$$\frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{k}{2} \overline{\varrho^2} = \frac{1}{2} E$$

$$i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Die letzte Gleichung sagt aus, dass die Umlaufzeit der Elongation der Schwingungen unabhängig ist, dass also die Schwingungen isochron sind.

weiterens soll angenommen werden, es sei

$n = -2$ , was dem Newton'schen Anziehungsgesetze entspricht, welches in der Bewegung der Weltkörper herrscht. Für diesen Fall gehen die obigen Gleichungen über in:

$$(35) \quad -k \frac{\overline{1}}{r} = -k \frac{1}{\varrho} = 2E$$

$$(36) \quad \frac{m}{2} \overline{v^2} = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = -E$$

$$(37) \quad i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \varrho^{\frac{3}{2}} = 2\pi k \sqrt{m} (-2E)^{-\frac{1}{2}}$$

Die letzte Gleichung, welche wir auch so schreiben können:

$$i^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{k} \varrho^3,$$

entspricht dem dritten Keplerschen Gesetze, welches als sehr specieller Fall in unseren Gleichungen enthalten ist. Es muss aber etwas anders ausgesprochen werden, als es von Kepler geschehen ist, und auch jetzt noch häufig geschieht, dass nämlich die Quadrate der Umlaufzeiten sich wie die Cuben der mittleren Entfernungen verhalten. Dieses ist nicht streng richtig, denn  $\varrho$  ist nicht der Mittelwerth von  $r$ , sondern  $\frac{1}{\varrho}$  ist der Mit-

telwerth von  $\frac{1}{r}$ . Die andere, strengere Form des Satzes, dass die Quadrate der Umlaufzeiten sich wie die Cuben der grossen Axen der Ellipsen verhalten, stimmt



ausdrücken. Sei die Kraft, welche zwei Punkte mit den Massen  $m$  und  $m_1$  in der Entfernung  $r$  auf einander ausüben, durch  $mm_1 \varphi'(r)$  dargestellt, wobei ein positiver Werth der Function einer Anziehung entspricht; sei ferner:

$$\varphi(r) = \int \varphi'(r) dr,$$

dann ist das Ergal bestimmt durch die Gleichung:

$$U = \sum mm_1 \varphi(r),$$

worin die Summe alle Combinationen der gegebenen Massenpunkte zu je zweien umfasst. Demnach geht die vorige Gleichung für diesen Fall über in:

$$(40) \quad \delta \sum mm_1 \overline{\varphi(r)} = \sum \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + \sum m \overline{v^2} \delta \log i.$$

Wir wollen nun speciell annehmen, dass nur zwei materielle Punkte mit den Massen  $m$  und  $m_1$  gegeben seien, welche sich unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Anziehung um einander bewegen. In diesem Falle können wir, wenn wir alle Grössen, die sich auf den zweiten Punct beziehen, durch Buchstaben bezeichnen, die mit einem Index versehen sind, die vorige Gleichung ohne Anwendung von Summenzeichen so schreiben:

$$\begin{aligned} mm_1 \delta \overline{\varphi(r)} &= \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + \frac{m_1}{2} \delta \overline{v_1^2} + m \overline{v^2} \delta \log i \\ &+ m_1 \overline{v_1^2} \delta \log i_1. \end{aligned}$$





$$m \frac{dx}{dt} + m_1 \frac{dx_1}{dt} = 0,$$

wodurch die vorige Gleichung übergeht in:

$$mm_1 \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right)^2 = (m - m_1) \left[ m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + m_1 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \right].$$

Man sieht, diese Gleichungen gelten für die gegenseitige Bewegung, und wenn wir uns diese drei Gleichungen nicht denken, so erhalten wir:

$$mm_1 u^2 = (m + m_1) (mv^2 + m_1 v_1^2)$$

oder

$$mv^2 + m_1 v_1^2 = \frac{mm_1}{m + m_1} u^2.$$

Wenn man diesen Werth von  $mv^2 + m_1 v_1^2$  in die Gleichung (41) einführt, und dann das Product  $mm_1$  forthebt, so kommt:

$$(44) \quad \delta \overline{\varphi(r)} = \frac{1}{m + m_1} \left( \frac{1}{2} \delta \overline{u^2} + \overline{u^2} \delta \log i \right).$$

Zur noch weiteren Abkürzung wollen wir diese Gleichung in folgender Form schreiben:

$$(45) \quad \delta \overline{\varphi(r)} = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1} \delta \log (i \sqrt{\overline{u^2}}),$$

und hierin wollen wir wieder, wie in dem früheren Falle, für das unter dem Logarithmuszeichen stehende Product ein einheitliches Zeichen setzen, indem wir setzen:



einfache Bedeutung. Es ist nämlich die relative Bahnlänge, d. h. die Länge der Bahn, welche wir erhalten, wenn wir uns den einen Punkt ruhend denken und dem anderen die Geschwindigkeit  $u$  zuschreiben. Diese Bahn ist ein Kreis mit dem Radius  $r$ , und wir erhalten daher:

$$\lambda = iu = 2\pi r$$

und somit:

$$r = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Diesen Werth von  $r$  in (49) eingesetzt, giebt:

$$(50) \quad \varphi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = f(\lambda),$$

und hierdurch ist die Form der Function  $f(\lambda)$  bestimmt. Führen wir noch, wie früher, das Zeichen  $q$  ein mit der Bedeutung

$$(51) \quad q = \frac{\lambda}{2\pi},$$

so kommt:

$$\varphi(q) = f(\lambda),$$

und durch Anwendung dieser Gleichung geht (48) über in:

$$(52) \quad \overline{\varphi(r)} = \varphi(q).$$

Indem wir nun wieder zu der Gleichung (47)

zurückkehren, können wir sie dem Vorigen nach in folgender Form schreiben:

$$\delta\varphi(\varrho) = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1} \delta \log(2\pi\varrho)$$

oder :

$$\varphi'(\varrho) \delta\varrho = \frac{\overline{u^2}}{m + m_1} \cdot \frac{\delta\varrho}{\varrho},$$

woraus folgt:

$$(53) \quad \overline{u^2} = (m + m_1) \varrho \varphi'(\varrho).$$

Wenn wir ferner in der Gleichung (46) an die Stelle von  $\lambda$  das Product  $2\pi\varrho$  setzen, so kommt:

$$2\pi\varrho = i \sqrt{\overline{u^2}}$$

oder :

$$i = 2\pi \frac{\varrho}{\sqrt{\overline{u^2}}}.$$

Hierin für  $\overline{u^2}$  seinen Werth aus (53) gesetzt, giebt

$$(54) \quad i = 2\pi \sqrt{\frac{\varrho}{(m + m_1) \varphi'(\varrho)}}.$$

Endlich wollen wir noch die Energie unseres Systems ausdrücken. Es ist nämlich:

$$E = mm_1 \varphi(r) + \frac{m}{2} v^2 + \frac{m_1}{2} v_1^2$$











Irrationalität der Curve äquivalente Anzahl von Doppel- und Rückkehrpunkten zu erhalten. Diese nämliche Bestimmung kann man mit Hülfe der erwähnten Transformation direct, ohne Voraussetzung der Pniseux'schen Entwicklungen, erreichen.

Dazu genügt es, irgend eine rationale Transformation, bei welcher ein Fundamentalpunkt in den singulären Punkt  $P$  der Curve  $C$  gelegt wird, auf die Curve anzuwenden. Es wird dabei nur eine so allgemeine Lage der Transformationscurven gegen  $C$  vorausgesetzt, dass die Jacobi'sche Curve der Transformation von den Tangenten von  $C$  in  $P$  nicht berührt wird.

Bei einer solchen Transformation löst sich die von dem vielfachen ( $\nu$ -fachen) Punkte  $P$  als solchem herrührende Singularität in der transformirten Curve  $C'$  auf; und es bleiben demgemäss, dem Punkte  $P$  entsprechend, auf  $C'$  Punkte von niedrigerer Singularität, die zusammen, verbunden mit einem allgemeinen  $\nu$ -fachen Punkte, äquivalent sind dem Punkte  $P$  von  $C$ . Bei einer fortgesetzten Anwendung von Transformationen auf die singulären Punkte der so entstehenden Curven  $C'$ ,  $C''$ , . . . erniedrigt sich somit die Singularität der  $P$  entsprechenden Punkte immer mehr, bis endlich dem Punkte  $P$  eine Reihe von einfachen Punkten der transformirten Curve entspricht.

Diese Auflösung der Singularität von  $P$  in die von mehreren Punkten ist identisch mit der Trennung der Functionswerthe um den singulären Punkt in Klassen. Die Anzahl der getrennten einfachen Punkte, die zuletzt  $P$  entsprechen, ist gleich der Anzahl der cyklischen

ame der Functionswerthe um den singulärpunkt <sup>1)</sup>).

ie Singularität von  $C$  in  $P$  zählt, in Bezug  
as Geschlecht von  $C$ , für  $\frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}$  Doppel-

te, plus der Anzahl der Doppelpunkte,  
e in den dem Punkte  $P$  entsprechenden  
lären Punkten von  $C'$  enthalten sind; und  
estimmt sich somit durch eine Fortsetzung  
: Abzählung bei den successiven Transfor-  
nen. Auch die Anzahl der darunter ent-  
en Rückkehrpunkte (und zugleich die An-  
der in einem der cyklischen Systeme ent-  
en Wurzeln) bestimmt sich aus der Art  
Berührung von  $C'$  mit der  $P$  entsprechen-  
fundamentalcurve der Transformation; eine  
urung  $\mu$ ter Ordnung eines Zweiges von  $C'$   
ieser Curve bedeutet ein cyklisches System  
+ 1 Wurzeln oder  $\mu$  Rückkehrpunkte un-  
er Zahl der hiervon herrührenden Doppel-  
e.

ie einfachste und bequemste unter den hier  
rendenden Transformationen ist die ebene  
atische, bei welcher den Geraden der Ebene  
schnitte durch 3 feste Punkte entsprechen.  
führt man die hyperelliptische Curve  $2n$ ter  
ng mit singulärem  $(2n-2)$  fachem Punkte  
 $= x_2 = 0$ )

$$= x_3^2 \left[ f_{n-1}(x_1, x_2) \right]^2 + f_{2n}(x_1, x_2) = 0,$$

ie auch im Folgenden, der Index an  $f$  die  
ng der Functionen  $f$  anzeigt, durch die  
atische Transformation

S. Puiseux, in Lionville's Journal, t. 15 und 16.

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

über in die Curve

$$C' = y_1^2 y_2^2 f_{n-1}^2(y_2, y_1) + f_{2n}(y_2, y_1) \cdot y_3^2 = 0.$$

Dem singulären Punkte von  $C$  entsprechen auf  $C'$  die  $n-1$  gewöhnlichen Doppelpunkte  $y_3 = 0$ ,  $f_{n-1}(y_2, y_1) = 0$ , und  $P$  ist

$$\frac{(2n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2} + (n-1)$$

Doppelpunkten äquivalent, oder das Geschlecht von  $C$  ist  $n-1$ . Es bilden sich hier zuerst  $n-1$  Klassen, von denen jede sodann in zwei zerfällt; d. h.  $C$  hat einen  $(2n-2)$  fachen Punkt mit  $n-1$  getrennten Tangenten, in deren jeder sie einen Selbstberührungspunkt hat.

## II.

Die Methode dieser Transformation lässt sich auf algebraische Functionen zweier Variablen ausdehnen und führt hier insbesondere zur Untersuchung singulärer Knotenpunkte einer Fläche und zur Bestimmung der Wirkung derselben auf das Flächengeschlecht, das bis jetzt erst bei vielfachen Curven und allgemeinen konischen Knotenpunkten der Fläche festgestellt worden ist<sup>1)</sup>.

Wenn man eine Raumtransformation<sup>2)</sup> an-

1) S. meine schon citirte Note vom 14. Juli 1869.

2) Ueber die hierzu geeignetsten Transformationen, die direct umkehrbaren, vgl. Cayley, Proc. of the London Math. Soc., vol. III, 1870.

Cremona, diese »Nachrichten« vom 4. Mai 1871, und Indiconti del R. Istit. Lombardo, vom 5. Mai 1871, so



che Kante für  $f_{\mu+i}(x_1, x_2, x_3) = 0$ , von  $i = 0$  bis  $i = \nu - 1$ , für  $\mu + \nu - 1 \leq n$ . Dann wird  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$  ein  $\nu$ facher Punkt von  $F'$ , und das Geschlecht  $p$  von  $F$  erniedrigt sich durch  $P$  um

$$\frac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2) + \frac{1}{6}\nu(\nu-1)(\nu-2).$$

So wird, für  $n = 5$ ,  $\mu = 3$ ,  $\nu = 3$ , die Fläche  $F_5$ , wenn sie noch eine Doppelgerade besitzt, auf der Ebene abbildbar.

c) Sei bei der Fläche 2) die Gerade  $x_1 = x_2 = 0$  eine  $\nu$ fache Kante von  $f_\mu(x) = 0$ ,  $f_{\mu+1}(x) = 0, \dots$  und  $f_n(x) = 0$ , für  $\nu \leq \mu$ . Bei der speziellen Transformation 1) erhält dann  $F'$  ein ähnliches System mit  $n$ fachem Punkte  $P'$  ( $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ) und  $\nu$ facher Geraden  $y_1 = y_2 = 0$ . Und man folgert aus der Gleichsetzung der Reduction auf  $p$  für beide vielfache Geraden den Satz, dass, wenn eine Fläche einen  $\mu$ fachen Punkt enthält, der für sich allein die Reduction  $M = \frac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)$ , und eine von  $P$  ausgehende  $\nu$ fache Curve, welche für sich die Reduction  $N$  auf das Geschlecht der Fläche hervorbringen würde, die gesamte Reduction durch Punkt und Curve

$$M + N = \frac{\nu(\nu-1)(3\mu-2\nu-2)}{6}, \text{ für } \nu \leq \mu,$$

beträgt.

d)  $F$  besitze einen uniplanaren Knotenpunkt  $\mu$ ter Ordnung, aber der Art singular, dass  $F$  die Gleichung hat:

$$\begin{aligned}
 F &= x_4^{n-\mu} x_1^\mu + x_4^{n-\mu-1} x_1^{\mu-1} f_2(x_1, x_2, x_3) \\
 &\quad - x_4^{n-2\mu-1} x_1 f_{2\mu-2}(x) + x_4^{n-2\mu} f_{2\mu}(x) \dots \\
 &\quad - \dots, \quad x = 0, \quad \text{für } 2\mu-1 >
 \end{aligned}$$

Dann erhält  $F$  nach 1) als Singularität noch eine Anzahl Geraden  $y_1 = y_4 = 0$ , durch welche sich das Geschlecht bei Berücksichtigung der beiden Schnittpunkte dieser Geraden mit  $F$ , im  $\mu(\mu-1)$  ändert. Der singuläre uniplanare Knotenpunkt von  $F$  reducirt daher das Geschlecht  $\mu$  um

$$\mu(\mu-1) - \mu(\mu-1) = \frac{1}{2}\mu(\mu-1)(4\mu-5).$$

Es ist zu bemerken, dass ein uniplanarer Knotenpunkt von der Art, dass jede Ebene, welche die Fläche in einem einzigen zusammenhängenden Doppelpunkte schneidet, also ein Selbstberührungspunkt der Fläche, das Geschlecht der Fläche um 1 erhöht, und eine Fläche 4ter Ordnung

$$x_4^4 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 - f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$$

in der Ebene abbilden lassen. In diese Fläche auch auf eine Doppelpunktcurve 4ter Ordnung<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Die Formel in dem schon citirten Memoire über die Raumtransformationen,



eine Fläche der Ordnung  $2m+2$ , mit allgemeinem  $2m$  fachen Punkte  $P' (y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ , mit dem Doppelkegelschnitt  $K'$  und mit einer in dessen Ebene liegenden allgemeinen Doppelcurve  $(m-1)$ ter Ordnung  $(y_4 = 0, f_{m-1}(y) = 0)$ . Das Geschlecht dieser Fläche ist  $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ .

»Das Flächengeschlecht der Flächen, welche auf eine Doppalebene mit allgemeiner Uebergangscurve führen, ist  $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ .

Wenn  $\Omega_{2m}(x) = 0$  einen  $\nu$  fachen Punkt in  $x_2 = x_3 = 0$  besitzt, so erhält  $F$  einen singulären uniplanaren Doppelpunkt im Punkte  $\Pi (x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ . Man macht daher eine Transformation

$$x_2 : x_3 : x_4 : x_1 = \xi_2 \xi_1 : \xi_3 \xi_1 : \xi_4 \xi_1 : \psi_2(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

und erhält eine Fläche  $\Phi$  mit singulärer Geraden  $G (\xi_1 = \xi_4 = 0)$ . Für ein gerades  $\nu$ ,  $\nu = 2\varrho$ , ergeben sich sodann in einem Punkte von  $G$  zwei getrennte Reihenentwicklungen:

$$\xi_4 = x \xi_1^{\varrho-1} + \dots$$

$$\xi_4 = -x \xi_1^{\varrho-1} + \dots,$$

und die Fläche  $\Phi$  hat zwei Schalen, welche sich  $(\varrho-1)$  punktig in jedem Punkte der Geraden  $G$  treffen, in der singulären Berührungsebene  $\xi_4 = 0$ . Man leitet hieraus ab, dass die Fläche  $(2m-4)$ . Ordnung, deren Anzahl das Geschlecht  $p$  der Fläche  $F$  bestimmt, durch den Punkt  $\Pi$  derart zu gehen müssen, dass sie daselbst die Ebene





in neuerer Zeit vielseitiger Zustimmung zu-  
 genommen gehabt und ist vornehmlich wohl durch  
 die grosse Autorität des berühmten französischen  
 Naturforschers zur allgemeinen Anerkennung ge-  
 langt. Erst E. Metschnikoff's<sup>2)</sup> Beobachtun-  
 gen über einige Verhältnisse der innern Orga-  
 nisation und besonders über die embryonale Ent-  
 wicklung von *Nebalia Geoffroyi* brachten  
 wichtige und wesentliche Gründe für die Natur  
 dieser Crustaceenform als Malakostrake. Vor allem  
 musste die Anwesenheit eines Kaumagens mit  
 Chitinbewaffnung und die Aehnlichkeit der Em-  
 bryonalbildung mit der von *Mysis* die früher  
 schon oftmals ausgesprochene Verwandtschaft von  
*Nebalia* mit den Schizopoden bekräftigen.  
 Minder schwer fiel die Angabe in die Wagschale,  
 auf welche freilich Metschnikoff für seine Deu-  
 tung als „phyllopodenartiger Decapod“ das Haupt-  
 gewicht legte, dass *Nebalia* während des em-  
 bryonalen Lebens nach dem Naupliuszustand  
 noch ein 2tes in der Gliedmassenzahl mit *Zoëa*  
 übereinstimmendes Stadium zu durchlaufen hat,  
 indem das letztere seiner Segment- und Glied-  
 massenzahl nach dem jüngsten Stadium der Cy-  
 clopsform entspricht, welches ja auch bereits  
 innerhalb der Eihülle im Kreise der Entomo-  
 straken (*Lernaeopoden*) auftritt.

Unter solchen Verhältnissen erschien eine  
 nochmalige genaue Prüfung des gesammten Kör-  
 per- und Gliedmassenbaues erwünscht, und diese  
 hat denn auch die Deutung Metschnikoffs nicht

nouveaux. Annales des sciences naturelles, I sér. tom  
 XIII. 1827. Ferner II ser. tom. III. 1835 und Histoire  
 naturelle des Crustacés. tom III. 1840.

2) Sitzungsberichte der Naturforscherversammlung zu  
 Hannover 1865 p. 218, sowie Kefersteins Jahresbericht  
 --- hat Metschnikoff eine grössere russische  
 3 über diesen Gegenstand veröffentlicht.







































losreißen können ; 2) und dass trotzdem hinter allen Sprachstämmen eine noch höhere und ältere Gestalt aller menschlichen Sprache steht, welche allmählig sicher wieder so aufgefunden werden kann dass man das wechselseitige Verhältniss des einen zum andern von vorne an klar zu überblicken vermag. Im besondern wissen wir jetzt deutlich genug dass der Semitische Sprachstamm keineswegs der älteste aller oder vielmehr der aller ältesten menschlichen Sprachart am treuesten gebliebene ist, wohl aber von seinem ersten Anfange an gewisse durchgreifende unverrückbare Eigenthümlichkeiten hat. Zu diesen gehört nun auch der *status constructus* oder vielmehr die Wortkette, welchen Namen der Vf. der neuen Schrift am besten beibehalten hätte, da er deutsch, kurz, und dann sachlich den besten Gegensatz zu der Wortzusammensetzung ausdrückt welche dem Mittelländischen ebenso eigenthümlich wie dem Semitischen fremd ist. Zwar hat sich in den einzelnen Semitischen Sprachen und schon in den ältesten welche wir geschichtlich kennen die Wortbildung um diese Wortkette herum sehr verschieden ausgebildet: allein fassen wir alles was dahin gehört noch richtig und genau zusammen, so können wir auch da den ursprünglichen Zusammenhang und die aus diesem hervorgegangenen Verschiedenheiten noch sicher genug wiederfinden. Und dieses alles zusammen wäre etwa das was man unter den Begriff des Ursprunges des Semitischen *stat. constr.* bringen könnte, über welchen unser Vf. in dem Haupttheile seiner neuen Schrift reden will.

Wir bedauern jedoch sagen zu müssen dass der Vf. seinen Gegenstand sehr unrichtig und verkehrt abhandelt. Scheint dies Urtheil hart



Schwere aufzustellen und richtig zu würdigen oder wenn man sie mit fremdartigen Bestrebungen vermischt und rein eigensinnige Absichten mit ihnen verfolgt; wie das hier deutlich geschehen ist. Auch unser Vf. gibt nicht etwa selbst einen neuen Versuch das noch nie gründlich Bewiesene endlich allseitig einleuchtend zu machen er bleibt vielmehr im Vertrauen auf die Meinungen und Wünsche von ein paar neuesten Gelehrten bei der blossen Voraussetzung stehen obgleich er wusste dass ihre Grundlosigkeit von anderer Seite schon stark genug und mit vielen Gründen nachgewiesen war. Wir bemerken jedoch an dieser Stelle dass der Vf. bei der Abfassung seiner Schrift die dritte sprachwissenschaftliche Abhandlung des Unterrichts offenbar noch nicht kannte <sup>2)</sup>: und da in ihr diese Frage wiederholt in Betracht gezogen ist können wir hier um so leichter zu andern Erwägungen übergehen.

Die Thatsachen nämlich welche der Vf. zwar sehr ausführlich bespricht aber nur von jener grundlosen Voraussetzung aus betrachtet wissen will, sind diese. Wir finden in den übrigen Semitischen Sprachen und zwar gerade in solchen welche für uns heute die ältesten sind

2) Wir setzen, da von dieser Abhandlung auch in den Nachrichten noch keine Rede war, ihre nähere Anschrift hieher: Abhandlung über die geschichtliche Folge der Semitischen Sprachen. Dritte sprachwissenschaftliche Abhandlung von H. Ewald. Aus dem XVten Bande der Abhandlungen der K. Ges. der WW. zu Göttingen. Göttingen in der Dieterichsche Buchhandlung, 1871. 68 S. in 4. — Auch bemerke

wir hier dass S. 36 Z. 6 v. u. <sup>6</sup>خَدِم, S. 44 Z. 12 anderswohin, S. 62 Z. 7 v. u. ihnen für ihm zu lesen ist.









Neuarabische kann ein solches rein willkürliches Verfahren beweisen.

Da jedoch diese Laute sich im Aramäischen Hebräischen und Phönikischen nur sehr zerstreut und für gewöhnliche Augen theilweise sogar schwer erkennbar erhalten haben, so scheint da für die willkürliche Betrachtung, wenn man etwa solche liebt, heute ein sehr freies Feld sich zu öffnen. Allein was will man mit dem Aethiopischen machen welches noch ganz durchgängig jene alterthümliche Bezeichnung der Wortkette erhalten hat und sich dadurch von dem Arabischen welchem es sonst so nahe steht vollkommen unterscheidet? Inderthat können solche Gelehrte welche in unsern Tagen so untreffende Meinungen aufstellten und unsern Vf. auf ihren irrthümlichen Weg hinführten, das Aethiopische gar nicht recht gekannt noch genau berücksichtigt haben. Allein unser Vf. will nun einmal von seiner Voraussetzung aus auch das dieser durch und durch widerstrebende Aethiopische bezwingen: so versucht er S. 154ff. seinen Bau unter dies Joch zu bringen. Er verliert sich aber in ein so offenes blosses Vernünfteln und reimloses Vermuthen dass es kaum der Mühe werth ist seine Worte darüber unsern Lesern vorzulegen. Wo statt klarer Einsicht und Erkenntniss ein bloss umherschweifendes anhaltsloses Vermuthen und statt nützlicher Vernunft das bekannte und leider in der neuesten Zeit wieder so allgemein verbreitete Uebel der Vernünftelei einreißt, da hört alle Strenge ja aller Ernst der Wissenschaft auf; und immer ist ein solches Ueberhandnehmen des willkürlichen Vermuthens und der grundlosen Einbildung schon an sich ein Merkmal dass der gelehrte Mann mitten indem er ein Forscher



mittelalterlichen Grammatikern anklebt, sehr deutlich erkennen. Diese Sprachgelehrten hatten bekanntlich von dem Wesen und Umfange aller Semitischen Sprachen gar keine klare Vorstellung; sie verglichen höchstens bisweilen die Neu-persische Sprache weil viele von ihnen selbst Perser waren: aber diese konnte ihnen zum genaueren Verständnisse der Arabischen wenig nützen. Da nun das Arabische, wie es überhaupt in seinem Sazbaue weit geringere Freiheit und Mannichfaltigkeit als die übrigen Semitischen Sprachen ausgebildet hat, die Wortkette bei weitem nicht so frei gebrauchte und so weit ausdehnte als (das Aethiopische ausgenommen) die übrigen Semitischen Sprachen, so versteht sich leicht dass wer die Anschauungen und Lehren dieser Arabischen Grammatiker des Mittelalters über den *stat. constr.* zu Grunde legt, damit für unsre heutige Wissenschaft bei weitem nicht ausreicht. Hinzukommt dass jenen Gelehrten der geschichtliche Sinn in den Sprachforschungen gänzlich abging: und leider ist es auch bei unserm Vf. dieser Mangel welcher seine Meinungen über das Wesen der Semitischen Wortkette drückt.

Wir enthalten uns auch die mancherlei zwar mehr oder weniger neuen aber völlig verfehlten Ansichten hier näher zu beurtheilen welche der Vf. im Verlaufe seiner Schrift besonders bei seiner Abhandlung über den Ursprung der Wortkette und der Semitischen Casusbildungen aufstellt. Hat man einmal das Wesen einer weitgreifenden geschichtlichen Erscheinung nicht richtig gefasst, so drängen sich einem um sie herum leicht hundert scheinbar sehr wol mögliche Ansichten auf, welche doch näher betrachtet gar keinen Grund haben und so so-



168—192 Annalen von 710—811, aus einer Handschrift der Brüsseler Bibliothek, die in diese im Jahr 1837 aus der Van Hultheims übergegangen war, Nr. 17350 ff<sup>1</sup>. (ebend. VII, S. 241; vgl. Inventaire des manuscrits de l'ancienne bibliothèque royale des ducs de Bourgogne S. 348). Sie enthält Abschriften aus einem Codex von St. Maximin zu Trier, aus dem erst Alex. Wilthem Auszüge machte, die dann Noll's Veranlassung gaben eine Abschrift fertigen zu lassen, die er selbst, wie er am Ende bemerkt, collationsierte (Relegi et emendavi hac die 20. Februarii 1783). Er (oder, wie Reiffenberg S. 107 sagt, Wilthem) notiert zu Anfang: *Ex antiquissimo codice monasterii S. Maximini, scripto, ut apparet ex litteris, tempore Caroli Magni. Al-* hier tut sich wird dieses Zeugnis vielleicht nicht schwer wiegen; dass es sich aber um eine alte Handschrift handelt, dürfen wir doch schon hieran annehmen.

Die Ausgabe, und wahrscheinlich schon die Abschrift, lässt manches zu wünschen übrig; einzelnes hat der Herausgeber berichtigt (einiges auch ohne Grund), anderes lässt sich nach Vergleichung verwandter Annalen verbessern (z. B. 785 S. 179 statt: 'usque Gubardungawi' lies: 'u. in Bardungawi'; 787 S. 181 statt 'super fluvium Tschibi, Tassilo' lies 's. f. Lech, ibi Tassilo'; 802 S. 186: statt 'Orlana' lies 'Ortona'<sup>2</sup>; 810 S. 191: statt 'Verasicus' l.: 'Arsafius').

Die Annalen, welche gerade ein Jahrhundert Fränkischer Geschichte umfassen, fallen mit keinem der bisher bekannt gewordenen Werke zusammen, zeigen aber mit mehr als einem Ver-

<sup>1</sup> Bethmann hat diese Nummer in sein Verzeichnis, Archiv VIII, nicht aufgenommen.

<sup>2</sup> Vgl. 786 S. 180 wo 'Tul' statt 'Lul' gelesen ist.



da mit diesem Jahr die nähere Verwandtschaft der beiden Texte vollständig aufhört. Es hat sich auch eine Bearbeitung der allgemeinen und fränkischen Geschichte in Anschluss an Bedas Chronik eben bis zu diesem Jahr in einer Leidener Handschrift (Scaliger 28) erhalten, die schon früher als Grundlage des Chron. Moissiacense erkannt ist; s. Jaffé in Mommsens Ausgabe des Cassiodor S. 677. Ob der Anfang in dem Codex von St. Maximin gefehlt oder Nelli die Abschrift des älteren Theils für überflüssig gehalten hat, wird sich jetzt nicht entscheiden lassen. In dem was erhalten zeigt der Text mit dem des Chr. Moissiacense, wie er gedruckt vorliegt, genaue Uebereinstimmung auch in kleineren Dingen (S. 290 Z. 26: quendam mit Cod. 1; Z. 12: die Form Ragngario). Manchmal ist die Lesart besser, namentlich wo die Ausgabe sich nur auf eine Handschrift (oder Martenes Ausgabe derselben) stützen kann (z. B. S. 291 Z. 12: Vinciaco; Z. 25: Theodericum statt Theodosium). Die Formen sind alterthümlich (wie Frigiones, Austrea, ultra Ligere; inluciscente). Erhebliche Abweichungen sind nur 716 S. 291 statt 'de exercitu suo': 'de sodalibus suis'; Z. 24 nach 'reddidit' der Zusatz: sed non diu in regno resedit; Z. 46 steht 'His diebus' und der Beisatz 'minor' zu Gregorius; statt 'magnis muneribus' heisst es: 'muneribus magnis et infinitis'. Unmittelbar darauf gehen aber die beiden Texte aus einander, indem Max. nach 'misit' (S. 291 Z. 1) fortfährt: quo facto patrato ut a partibus imperatoris recederet et Romano consulto (l.: consulo) praefato principi Carolo sanciret; Worte die sich unmittelbar an Fredegar. cont. anschließen, dem auch die folgenden: ipse autem princeps magnifico honore ipsam legationem recepit,





weggelassenen Zusatz: dominica die. In die vorher erwähnte längere Geschichte aus dem Liber pontific. ist der Satz eingeschoben: A. inc. D. 750. Pippinus elevatus est in regem ac postea regnavit annis 18, dessen erster Theil den angeführten Annalen zu 752 entspricht. — Von 754 an folgt Max. diesen genauer, doch ohne alles aufzunehmen was sie geben oder sich ganz wörtlich an ihren Ausdruck zu binden, einzelne auch mit Zusätzen. So heisst es

Ann. Mos. (Laur.).

761. ... Et rex Pippinus fuit in Wasconia cum exercitu suo usque ad Limodiam civitatem.

762. Pippinus fuit in Wasconia et conquisivit Bidurgam....

Ann. Max.

761. Rex Pippinus in Wasconia, et conquesivit Limovicam civitatem, Clermontem cremavit, alio anno conquesivit civitatem Bituricas.

Der Zusatz über Clermont kann aus der Ann. Laur. maj. genommen sein, obschon dies nicht speciell vom Verbrennen dieser Stadt sprechen, wie es der Cont. Fredegarii und aus ihm die Ann. Metenses thun.

Die Uebereinstimmung mit jenen Annalen geht bis zu dem Jahre 785, wie die hier mitgetheilten Stellen zeigen mögen:

Ann. Mos. (Laur.).

780. Domnus rex Karolus perrexit iterum in Saxonia cum exercitu et pervenit usque ad fluvium magnum Albeha; et Saxones omnia (omnes L) tradiderunt se illi, et omnia accepit in hospitale tam ingenuos quam et lidos; divisitque ipsam patriam inter episcopos et presbyteros seu et abbates, ut in ea baptizarent et praedicarent; necnon et Wini-dorum seu et Fresionum pa-

Ann. Max.

780. Dominus Carolus in Saxonia pervenit usque ad Albiam fluvium, et Saxones omnes tradiderunt se illi, et ille divisit ipsam patriam inter episcopos et abbates atque presbyteros baptizare et praedicare, et tunc Wini-dorum atque Fresionum multitudo magna credere se Domino sponponderunt.

















Ob der Umstand, dass die Handschrift v. Max. nur bis zum Jahre 811 geht, zu der Annahme berechtigt, die Ann. Laur. maj. hätte nur bis zu diesem Jahre dem Autor vorgelegt mag zweifelhaft sein. Da sie in dieser Zeit wenn auch von einem Verfasser, doch wahrscheinlich gleichzeitig und wenigstens theilweise Jahr für Jahr fortgeführt wurden (Giesebrecht S. 22), so wäre immerhin die Benutzung eines Theiles möglich. Der Schreiber des Codex hatte jedenfalls nicht mehr vor sich. Denn am Ende standen die Worte: *De reliquis sex aetatis. Haec de cursu praeteriti saeculi Hebraica veritate*, die auf Beda zurückgehen mit dessen Buch *de sex aetatibus mundi* den Anfang benutzte Theil in Zusammenhang steht. Vielleicht ist das Ganze was vorliegt als Fortsetzung der Bedaschen erweiterten und zum Jahr 741 herabgeführten Chronik zu betrachten. Dies würde erklären, dass der erste Theil den Text eines älteren Werkes wesentlich unverändert wiedergegeben hat, in dem später (nach 741) eine viel freiere Behandlung der benutzten Quellen stattfindet: nur hier ist der Autor so zu sagen selbständig aufgetreten.

Für die Abfassung aber um diese Zeit spricht, dass wo von Karl die Rede ist wiederholt dem 'rex' oder 'imperator' 'dominus' hinzugefügt<sup>1)</sup>, oder Karl als 'dominus Carolus' bezeichnet<sup>2)</sup>, einmal, abweichend von Ann. Laur. maj. 'domino nostro' gesagt wird (809).

1) Nur — 799 haben diese Bezeichnung mitunter auch die Ann. Laur. maj.

2) 796 steht auch 'dominus Pippinus rex'.



dessen bekannt war, was auf Grund der Aufzeichnungen in den Ann. Laurissenses majores (den sogenannten Königsannalen) und in Anschluss an diese von verschiedenen Verfassern geschrieben worden ist <sup>1)</sup>).

Eine neue Ausgabe mit verbessertem Text und genauem Nachweis der Quellen in den Monumenta Germaniae historica ist dringend zu wünschen.

## Verhältniss von *Πύθων ὄφης* zu sanskritisch (vedisch) *áhi-s budhnyà-s*.

Von

Theodor Benfey.

### §. 1.

In dem Petersburger Sanskrit-Wörterbuch ist unter dem Artikel *budhnyà* bei Anmerkung der gewöhnlichen Verbindung dieses Adjectivs, welches 'in der Tiefe (*budhná*) befindlich' bedeutet, mit dem Substantiv *áhi* 'Schlange', mit den wenigen Worten 'vgl. *Πύθων ὄφης*' eine Zusammenstellung veröffentlicht, welche zu den wichtigsten auf dem Gebiete der vergleichenden Mythologie gerechnet werden darf. *áhis* allein und insbesondere die Verbindung *áhis budhnyà* bezeichnet in den Veden bekanntlich den Dämon, welchen sich die indogermanische Anschauung in der atmosphärischen Tiefe, der Regenregion, ruhend vorstellte und ihm den Willen und die Macht zuschrieb, der Erde den befruchtenden Regen vorzuenthalten, indem er die als mi-

1) S. über andere solche Ableitungen Forschungen D. G. VIII, S. 632; Büdinger, Anfänge des Schulzwangs S. 34.



## §. 2.

Wenn ich mir in Folgenden einige Worte über die, wie gesagt, im Allgemeinen unzweifelhafte Verwandtschaft von *Πύθων ὄφης* mit *āhis budhnyàs* erlaube, so geschieht diess nur, um dieselbe im Einzelnen näher zu bestimmen.

In Bezug auf die Identität von *ὄφης* mit *āhis* ist mir diese Mühe durch *Ascoli* erspart <sup>1)</sup>. Dagegen sind die Verschiedenheiten zwischen *budhnyà* und *Πύθων*, wenigstens zum Theil, bis jetzt noch nicht erläutert.

Was das wurzelhafte Element in beiden Wörtern betrifft, sskr. *budh*, griech. *πύθ*, so ist darin nur die Länge des *v* im Gegensatz zu dem kurzen sskr. *u* noch dunkel; der Reflex von sskr. *budh* durch griech. *πύθ* dagegen ist bekannt, und durch eine hinlängliche Anzahl von Analogien geschützt. Nicht minder ist der Grund dieses Reflexes im Wesentlichen schon erläutert; dennoch muss ich mir erlauben, ihn mit wenigen Worten ins Gedächtniss zurückzurufen, da wir bei der Erklärung darauf zurückgreifen müssen.

In der indogermanischen Grundsprache gab es nur tönende Aspiratae, *gh*, *dh*, *bh*. In der Griechisch-Lateinischen Grundsprache erhob sich aber ein Bestreben sie in stumme zu verwandeln. Dieses Bestreben war bei der Trennung dieser Sprachen aber keinesweges schon durchgedrungen.

Dabei bemerke ich, dass in diesem bes. Abdr. manche dort stehen gebliebene Druckfehler corrigirt sind. Leider jedoch ist beider Orte, dort S. 43 Z. 21 hier S. 10, ein sinnentstellender Fehler zurückgeblieben, welcher ich folgendermassen zu heben bitte. Man lese nämlich 'sie an *dtbîn* bei *Firdusi* erinnert, während *Mujm-ut tevarikh* statt' u. s. w.

1) Corsi di glottologia. Vol. I. Fonologia, p. 193.



Silben zu bewahren, bis auf wenige Fälle eingebüsst. Im Sanskrit, wo sich die grundsprachlichen tönenden Aspiratae erhalten haben, tritt dann an die Stelle der anlautenden in der ersten Silbe regelmässig die entsprechende Nichtaspirata, so dass in den bemerkten Beispielen *budh*, *bodhate* entsteht. Da im Griechischen vorwaltend die Aspirata stumm geworden ist, so tritt in den Fällen, wo der Anlaut seine Aspiration einbüsst, an dessen Stelle vorwaltend die stumme Nichtaspirata z. B. *πυθ*, *πυθισσα*, (lateinisch *put-are*). Allein wie sich im Griechischen der ursprüngliche Charakter der Aspiratae als tönende in der keinesweges ganz seltenen Vertretung durch die tönenden *γ*, *δ*, *β* erhielt, so wirkt er auch noch in den stummen Reflexen, *χ*, *θ*, *φ* nach und zwar in denjenigen hieher gehörigen Fällen, wo die eine der Aspiratae nicht in die entsprechende stumme, sondern in die tönende Nichtaspirata übergeht, also *χ*, *θ*, *φ* nicht bezw. in *κ*, *τ*, *π*, wie vorwaltend, sondern in *γ*, *δ*, *β*, z. B. grundsprachliches *ghadh* in *γαθ* in *ἀγαθός* <sup>1)</sup>. Zugleich ist zu bemerken, dass im Griechischen bisweilen die wurzelanlautende Aspirata ihre Aspiration bewahrt und die wurzelauslautende sie einbüsst. Beide Umwandlungen treten in dialektischem Gegensatz hervor in *πιθ-ἀκνη*, attisch *φιδ-ἀκνη* aus grundsprachl. *bhadha* <sup>2)</sup>, nicht ganz selten aber auch die letzten allein im Gemeingriechischen, z. B. *θυγ-ατς* aus grundsprachl. *dhugh-atár* <sup>3)</sup>.

1) Vergl. 'Jubeo und seine Verwandte'. S. 16 (in Abhandlungen der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen. Bd. XVI).

2) S. Fick, Vgl. Wörterb. der Indog. Spr. I. 1870. S. 134.

3) Ebds. S. 103.





auf die erste besonders aufmerksam zu machen.

Im Griechischen erscheint sowohl die gewöhnliche Umwandlung des radikalen Theiles in  $\pi\nu\theta$  als die in  $\beta\nu\theta$ ; jene in  $\pi\nu\theta$ -μέν 'Boden, Grund, 'Tiefe', diese zunächst in dem damit gleichbedeutenden  $\beta\nu\theta$ -μό<sup>1)</sup>; ferner in  $\beta\nu\theta$ -ή, 'Tiefe, bes. Meerestiefe'; höchst wahrscheinlich auch in *Bύνη* (für  $\beta\nu\theta$ -νη), Name einer Göttin der Meerestiefe; für Assimilirung, dann Ausfall eines  $\theta$  vor  $\nu$  kenne ich zwar kein ganz analoges Beispiel, allein einigermaßen lassen sich  $\kappa\alpha\lambda\nu\mu\alpha\iota$  für  $\kappa\acute{\alpha}\delta$ -νν-μαι,  $\xi\alpha\lambda\nu\omega$  für  $\xi\acute{\alpha}\delta$ -νω (sskr. *ard*) vergleichen, welche ganz so aussehen, als ob sie aus einem Dialekt in die epische Sprache gedrungen wären und αι in lesbischer Weise statt  $\bar{\alpha}$  ( $\kappa\alpha\lambda\nu\mu\alpha\iota$  für  $\kappa\bar{\alpha}\nu\mu\alpha\iota$ ) hätten. Ist diese Auffassung von *Bύνη* richtig, so haben wir darin das Femininum von sskr. *budhná* zu erkennen, mit Wechsel des Accents, wie in Eigennamen im Gegensatz zu den Appellativen, aus denen sie entstanden sind, so häufig.

Doch zurück zu  $\beta\nu\theta$ ό. Da wir neben  $\pi\nu\theta$  in  $\pi\nu\theta$ -μέν auch  $\beta\nu\theta$  in  $\beta\nu\theta$ -μό finden, so dürfen wir annehmen, dass auch neben  $\beta\nu\theta$ -ό eine Nebenform  $\pi\nu\theta$ -ό existirte, und zwar um so unbedenklicher, da der Uebergang der ursprünglich anlautenden Aspirata in die stumme Nichtaspirata der vorherrschende ist. Diess zugestanden, haben wir eine vollständige Analogie für die Entstehung von *Πόθων* in dem Verhältniss von *Τρίτων* zu dem, im Femininum *Τρίτωνίς* zu Grunde liegenden, Masculinum *Τρίτωνο* = altbactrischem *Thraêtâna*<sup>2)</sup> und von diesem zu

1) Fick, a. a. O. S. 140 und 380.

2) Vgl. *Τρίτωνίς Ἀθάνα* in 'Nachrichten 1868. 53, ff. bes. Abdr. S. 21.



an sskr. *o* geltend machen. Doch lässt sich auch manches gegen diese Auffassung in Bezug auf *v* anführen, z. B. dass wir sogar im Sanskrit in einigen Fällen Dehnung von *u* statt der Gunirung (*û* statt *o*) eintreten sehen. Welche Annahme — unmittelbare Dehnung des *v*, oder Entstehung von *û* aus *εv* — vorzuziehen sei, wird sich nicht ohne eine umfassende Untersuchung feststellen lassen. Diese würde hier zu weit führen und für unsren Zweck völlig unerheblich sein, da die Dehnung des *v* durch die des *i* in *Τριτων* und *Τριτωνίδ* ihre für diesen ausreichende Analogie findet.

Was die etymologische Bedeutung von *Πόθω* betrifft, so ist sie nach Analogie von *Thraëtāna*, 'Sohn des Trita', höchst wahrscheinlich 'Sohn der Tiefe'; man vergleiche dazu *υἱωνό* von *εἶ* 'Sohn eines Sohnes' = 'Enkel'. Diese Bezeichnung der in der atmosphärischen Tiefe waltenden Schlange ist eine hochpoetische und dem gewaltigen dichterischen Geiste der Hellenen, wie mir scheint, keinesweges unangemessen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass, wie sich neben *Τριτωνίδ* die Form *Τριτώ* findet, welche für *Τριτωνι*, mit Einbusse des *ν*, *Τριτώ* steht, so auch neben dem msc. *Πόθων* das fem. *Πόθῃ* erscheint <sup>1)</sup>, jedoch als Bezeichnung der Localität, in welche die himmlische Schlange später versetzt wurde. Wie *Τριτωνίδ* nur fem. von *Τριτωνο* sein kann, so auch *Τριτώ* (für *Τριτωνι*), woraus folgt, dass auch in *Πόθῃ* für *Πόθωνι* die für *Πόθων* vorausgesetzte volle Form *Πόθωνο* als zu Grunde liegend entschieden anzuerkennen ist.

1) Vgl. Leo Meyer, Vglch. Gr. II. 142.

## U n i v e r s i t ä t.

### Preisvertheilung.

Die auf den 4. Juni fallende Preisvertheilung hatte dieses Mal am 7. d. M. statt. In der erstredete setzte Professor Wieseler auseinander, wie die Griechen und Römer über den Sieg und seine Verleiher dachten.

Von den drei Predigten, welche über den Text Joh. 15, 14—16 eingeliefert worden sind, wurde einer die Hälfte des königlichen Preises zuerkannt. Ihr Verfasser ist Heinrich Tiedge, stud. theol. aus Meinersen.

Die philosophische Facultät, bei welcher auf die aus dem vorigen Jahre wiederholte Aufgabe: *De Eratosthenis Chronographi fontibus et auctoritate*, zwei Arbeiten eingegangen waren, konnte der einen mit allgemeiner Uebereinstimmung den vollen Preis ertheilen. Als ihr Verfasser ergab sich Ludwig Mendelssohn, stud. philol. aus Oldenburg.

Die neuen Preisaufgaben sind folgende:

Als wissenschaftliche Aufgabe stellt die theologische Facultät:

*Pauli Samosatani vita e fontibus eruatur et doctrina ita exponatur, ut quid et ad haeresin Arianam et ad theologiam Antiochenam excollendam momenti habuerit, demonstretur.*

Als Predigttext giebt sie die Stelle:

2. Cor. 4, 5—7.

Die Aufgabe der juristischen Facultät lautet:

*Explicetur burggraviorum muneris ratio in diversis Germania e urbibus durante medio o*

Die medicinische Facultät wiederholt die Preisfrage des verigen Jahres, welche lautet:

*Es wird eine genaue Untersuchung der Structurveränderungen des Rückenmarks gewünscht, welche nach Vergiftungen durch Strychnin etwa entstehen mögen. Die Untersuchung wird sowohl an durch das Gift rasch oder allmählich getödteten, als auch an nach der Vergiftung wieder belebten Thieren vorzunehmen sein.*

Die Aufgaben der philosophischen Facultät sind:

I. Quaestio ordinaria:

*Ordo philosophorum postulat „ut leges a Livio in Aunalium orationibus componendis observatae ex veterum rhetorum arte explicentur inque quaestionem vocentur harum orationum loci, quorum verba propter rhetorices ignorantiam aliave de causa in codicibus depravata exstare videantur“;*

II. Quaestio extraordinaria:

*„Es soll die Gleichung derjenigen Spirale entwickelt werden, die ein Galvanometerdraht bilden muss, damit die Wirkung des Stroms auf die Nadel ein Maximum sei“.*

Die Bearbeitungen müssen mit einem Motto versehen und zugleich mit einem versiegelten Zettel, der aussen dieses Motto trägt und innen den Namen des Verfassers enthält, bis zum 15. April 1872 den Decanen der einzelnen Facultäten übergeben werden. Die Bearbeitung der medicinischen und der ausserordentlichen philosophischen Aufgabe kann auch in deutscher Sprache erfolgen.

---

# chniss der bei der Königl. Gesell- der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai, Juni 1871.

r. 79—82.

ologique de la Suède. Livr. 36—41.

over det Kongel. Dansk. Videnskabernes Selskabs  
dtingar. 1870. Nr. 2.

ason, thermochemiska Undersögelser. Nr. V—IX.  
havn. 1870. 4.

ing, om Strömningsforholdene i almindlige Led-  
og i Havet. Ebd. 1870. 4.

Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Se-  
Vol. VII. fasc. II. 1870. Upsaliae 1870. 4.

néteorologique mensuel de l'observatoire de l'Uni-  
d'Upsal. Vol. II. Nr. 1—6. Décembre 1869—  
1870. Upsal. 1870. 4.

gström, recherches sur le spectre solaire. Ebd.  
4.

ons of the Royal Society of Edinburgh. Vol.  
Part. 1. for the session 1869—70. 4.

gs of the R. Society of Edinburgh. Session  
70. 8.

ndig tijdschrift voor Nederlandsch Indie. Deel  
Aflev. 5—6. Deel XXX. Aflev. 1 en 2. Deel.

Aflev. 4—6. Batavia, s'Gravenhage 1867—70. 8.

niss der Abhandlungen der K. Preussischen Aka-  
der Wissenschaften von 1710—1870 in alphabe-  
Folge der Verfasser. Berlin 1871. 8.

esbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu  
ver. 1871. 4.

artment. Circular Nr. 4. 1870. Report on bar-  
and hospitals with descriptions of military posts.  
ngton 1870. 4.

tava. Aflevering 213—215. Leyden. 4.

ons de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg,  
des sciences naturelles et mathématiques. T. XI.  
1869 et 1870. Lnxembourg 1870. 8.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Jahrg. XX.  
1870. 8.

- Az Erdélyi Muzeum-Egylet Évkönyvei. Ötödik Kötet. Második & Harmadik Füzet. Kolozsvárt 1870. 71. gr. 8.
- Abhandlungen herausg. vom naturwiss. Vereine zu Bremen. Bd. 2. Hft. 3. Bremen 1871. 8.
- Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1870. Nr. 2. Moskou. 1870. 8.
- Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. April 1871. Berlin 1871. 8.
- Abhandlungen des naturwiss. Vereins zu Magdeburg. Hft. 2. Magdeburg 1870. 8.
- Naturwissenschaftlicher Verein zu Magdeburg. (Aus dem Beiblatt zur Magdeburgischen Zeitung). 8.
- C. Settimanni nouvelle théorie des principaux éléments de la Lune et du Soleil. Florence 1871. 4.
- Jahresbericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. Vereinsjahr 1870—71. Prag 1871. 8.
- Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Jahr 1870. 8.
- Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze matematiche e naturali. Vol. XI. — II della Serie III. Fasc. III. — Vol. XII. — III della Serie III. Fasc. I. II. Milano 1870. 71. 4.
- Classe di Lettere e Scienze morali e politiche. Vol. XI. — II. della Serie III. Fasc. III. Vol. XII. — III. della Serie III. Fasc. I. Ebd. 1870. 4.
- R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti Serie II. Vol. II. Fasc. XVII—XX. Vol. III. Fasc. I—XX. — Serie III. Vol. IV. Fasc. I—VII. Ebd. 1869—71. 8.
- Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. V. Parte II. che abbraccia l'anno 1870. 8.
- L. Gabba alcuni recenti studj di chimica organica e sull' applicazione dei loro risultati all' arte tintoria. Milano 1870. 8.
- Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. Bd. IX. Hft. 2. Kronstadt 1870. 8.
- Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde für 18<sup>69</sup>/<sub>70</sub>. Hermannstadt 1870. 8.
- Antonio de Marchi, Alla Germania. Canto. Palermo 1871. 8.













$p = 4$ . In Folge des letzteren Umstandes lässt sich die Curve  $C = 0$ , auf einer Raumcurve 6ter O. eindeutig abbilden, welche der Durchschnitt einer Fläche 3ter O. mit einer Fläche 2ter O. ist. Von einer solchen Curve kann man Punkte finden mittelst einer quadratischen und einer cubischen Gleichung; indem man nämlich eine Erzeugende der Fläche zweiter O. mit der Fläche 3ter O. schneidet. Daher kann man auch ohne Auflösung höherer Gleichungen und ohne die Seiten des Fünfseits getrennt, d. h. die Gleichung 5ten Grades als gelöst, vorauszusetzen, Tangenten von  $C = 0$  finden. Da nun jede solche Tangente ein Schnittpunctsystem liefert, dessen Invariante  $C$  verschwindet, so kann man (siehe p. 104 dieses Bandes der Nachrichten) der ihr entsprechenden transformirten Gleichung 5ten Grades die Jerrardsche Form geben, und gelangt so zu derjenigen Form der Gleichung 5ten Grades, auf welche die Hermitesche Auflösungsmethode sofort Anwendung findet.

Bei dieser Behandlung der Gleichung legt man auf der gewählten Tangente von  $C = 0$  zwei Punkte zum Grunde, welche in der folgenden geometrischen Beziehung zu dem auf ihr liegenden Schnittpunctsysteme sich befinden. Zu jedem System von Punkten einer Graden gehören drei, welche in Bezug auf jene ein harmonisches Polarsystem haben. Ist aber die Gerade eine Tangente  $u$  von  $C = 0$ , und jenes System von 5 Punkten ihr Schnittpunctsystem mit dem Fünfseit, so fallen zwei der drei Punkte in einen Doppelpunct  $x$ , zusammen, während der dritte,  $y$ , im Allgemeinen isolirt bleibt. Die Punkte  $x, y$  sind es, auf welche man das Schnittpunctsystem beziehen muss, um die Jerrardsche



werden, und ist dadurch völlig bestimmt. Ich nenne sie deswegen die Diagonalfäche. Sie ist vor andern Flächen dadurch ausgezeichnet, dass von ihren 27 Geraden 15 durch eine Gleichung 5ten Grades gefunden werden, welche keine andre als die bekannte Gleichung des Sylvesterschen Pentaeders ist; dieses fällt hier mit dem schon erwähnten Pentaeder zusammen. Von diesen 15 Geraden gehen 10mal 3 durch einen Punkt (Ecke des Pentaeders) und liegen zugleich in einer Ebene, so dass von den 45 Dreiecken der Fläche 10 in drei Strahlen durch einen Punkt ausarten.

Die 12 noch fehlenden Geraden der Fläche bilden 6 Paare und zwar eine Schläflische Doppelsechs. Die Geraden jedes Paares schneiden dieselben 5 unter den 15 ersten Geraden, und zwar je eine auf jeder Ebene des Pentaeders. Man kann also diese Geraden auch ohne Weiteres construiren. Ihre Asymptotenpunkte liegen auf der gesuchten Raumcurve 6ter O., welche das Bild von  $C = 0$  ist, und bestimmen dieselbe eindeutig. Während jeder Punkt der Raumcurve sonst einer Tangente von  $C = 0$  entspricht, sind die 12 Paare von Asymptotenpunkten die Bilder der 12 Doppelwendetangenten, und jede von diesen ist also einer der 12 letzten Geraden zugeordnet, wie denn auch nach dem Vorigen die Gruppierung jener Doppelwendetangenten der einer Doppelsechs entspricht <sup>1)</sup>).

1) Für die wirkliche Darstellung des Systems der 27 Geraden einer Oberfläche dritter Ordnung, welche ein sehr verwickeltes System bilden, giebt die Diagonalfäche ein einfaches und leicht construirtes Beispiel, welches zugleich die grösste Zahl der Eigenschaften des allgemeinen Systems ohne zu grosse Modificationen aufweist. Es dürfte sich daher zu Herstellung bequemer Modelle diese Fläche besonders empfehlen.























Erklärung des Römerbriefes: Prof. *Wiesinger*, fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums und der Briefe Johannis: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der Offenbarung Johannis: Prof. *Zahn* fünfständig um 11 Uhr.

Erklärung der beiden Korintherbriefe: *Derselbe* fünfständig um 9 Uhr.

Einleitung in die Kirchengeschichte: Prof. *Duncker* zweimal um 4 Uhr öffentlich.

Kirchengeschichte I. Hälfte: *Derselbe* sechsmal um 8 Uhr.

Reformationsgeschichte: Prof. *Wagenmann* zweimal, Mont. und Sonnab. um 8 Uhr öffentlich.

Dogmengeschichte: *Derselbe* fünfmal um 4 Uhr.

Geschichte der protestantischen Theologie: *Derselbe* viermal, Dienst., Mittw., Donnerst., Freitag, um 8 Uhr.

Comparative Symbolik: Prof. *Schoeberlein* viermal um 12 Uhr; Prof. *Matthaei* Donnerstag und Freitag um 2 Uhr.

Einleitung in die Dogmatik: Prof. *Schöberlein* zweiständig, Mittw. und Sonnab. um 12 Uhr, öffentlich.

Dogmatik Th. II.: Prof. *Ritschl* fünfmal um 12 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie Th. I. (Prolegomena, Theorie der Mission und Katechetik): Prof. *Ehrenfeuchter* viermal, Montag Dienstag Donnerstag Freitag um 8 Uhr.

Christliche Pädagogik: Prof. *Schöberlein* Montag und Dienstag um 4 Uhr.

Kirchenlied und Kirchengesang: *Derselbe* Donnerstag und Freitag um 4 Uhr.

Kirchenrecht s. unter Rechtswissenschaft S. 354.

Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten abwechselungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabend von 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabend von 3—4 Uhr, Prof. *Wiesinger* Mittwoch von 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Prof. *Schöberlein* Sonnabend von 9—10 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang: *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.



Landwirthschaftsrecht: Dr. *Ziebarth* Montag, Mittwoch und Freitag von 5—6 Uhr.

---

Deutsches Strafrecht: Prof. *Zachariae* fünfstündig um 11 Uhr.

---

Deutsches Reichsrecht: Prof. *Zachariae* vierstündig um 12 Uhr.

Deutsches Staatsrecht: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Wolff* fünf Stunden um 3 Uhr.

---

Katholisches und evangelisches Kirchenrecht: Prof. *Kraut* von 12—1 Uhr; Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts: Prof. *Dove* von 9—10 Uhr.

---

Civilprocesstheorie: Prof. *Briegleb*, achtstündig, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 4—6 Uhr.

Civilprocesstheorie: Dr. *Grefe*, 6 Stunden, 1 Uhr.

Deutscher Strafprocess: Prof. *Zachariae* fünfstündig um 10 Uhr.

---

Civilprocesspracticum: Prof. *Hartmann* zweimal wöchentlich von 4—6 Uhr.

---

Gerichtliche Medicin und öffentliche Gesundheitspflege siehe unter Medicin S. 357.

## Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie siehe unter Naturwissenschaften.

---

Anthropologie mit Benutzung der Blumenbach'schen Sammlung (auch für Nicht-Mediciner): Dr. *Merkel* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 11—12 Uhr.

---

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Henle*, Dienstag Freitag, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Henle*, Mont. Mittw. und Donnerst. von 2—3 Uhr.

ungen, in Verbindung mit Prosector Dr. *Merkel* von 9—4 Uhr.

eine Histologie in physiologischer und pathologischer Beziehung trägt Prof. *Krause* Sonnabend von 10—12 Uhr öffentlich vor.

topische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatim Dr. *Merkel* wie bisher.

topische Curse hält Prof. *Krause* im pathologischen Institute vier Mal wöchentlich, für Anfänger von 10—12 Uhr, für Geübtere um 12 oder um 2 Uhr.

eine und besondere Physiologie mit Erläuterung durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst*, in sechs Stunden wöchentlich von 10—12 Uhr.

entalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* wöchentlich von 10—11 Uhr.

am im physiologischen Institute leitet Prof. *Merkel* täglich in passenden Stunden.

eine Pathologie und Therapie: Prof. *Krämer* Dienstag, Donnerstag von 4—5 Uhr.

gische Anatomie lehrt Prof. *Krause* Dienstag von 10—12 Uhr, Mittwoch und Sonnabend um 10—12 Uhr.

linische Diagnostik in Verbindung mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken lehrt Dr. *Merkel* wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden.

pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und Anwendungswiese der Arzneimittel sowie Anleitung zum Verschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 10—12 Uhr.

mittellehre und Receptirkunde verbunden mit klinischen Demonstrationen und erläuternden Vorlesungen trägt Dr. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 10—12 Uhr vor; Dasselbe gleichfalls in Verbindung mit klinischen Demonstrationen der Arzneimittel und ihrer physiologischen und toxischen Wirkung lehrt Dr. *Marmé* wöchentlich von 5—6 Uhr.

die lehrt Prof. *Wiggers* sechsmal wöchentlich von 10—12 Uhr, Dieselbe Dr. *Stromeyer* privatissime.

die und Pharmakognosie für Mediciner lehrt Dr. *Husemann* vier Mal wöchentlich in später zu bezeichnenden Stunden.



Psychiatrische Klinik hält *Derselbe* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

---

Gerichtliche Medicin trägt Prof. *Krause* für Mediciner und Juristen Mittwoch und Sonnabend von 4—5 Uhr vor; Dasselbe lehrt Prof. *Lohmeyer* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Ueber öffentliche Gesundheitspflege mit besonderer Rücksicht auf Diaetetik (auch für Nicht-Mediciner) trägt Prof. *Meissner* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

---

Anatomie und Physiologie der Hausthiere nebst Pferde- und Rindviehkunde lehrt Dr. *Luelfing* sechs Mal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Die Theorie des Hufbeschlags trägt Dr. *Luelfing* öffentlich in zu verabredenden Stunden vor.

## Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Peip*, fünf Stunden, 3 Uhr.

Geschichte der alten Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freitag. 5 Uhr.

Geschichte der mittelalterlichen und neueren Philosophie: Dr. *Stumpf*, vier Stunden 5 Uhr.

Logik und Encyclopaedie der Philosophie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 10 Uhr.

Erkenntnistheorie oder Metaphysik: Prof. *Baumann*, Mont., Dienst., Donn., Freitag., 8 Uhr.

Psychologie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 4 Uhr.

Religionsphilosophie: Prof. *Bohtz*, Dienst. und Freitag., 4 Uhr; Prof. *Peip*, vier Stunden, 5 Uhr.

Ueber die Argumente für das Dasein Gottes: Dr. *Stumpf*, Mont. und Mittw. 6 Uhr, unentgeltlich.

---

In seiner philosophischen Societät wird Prof. *Baumann* Kants Kritik der praktischen Vernunft behandeln, Dienst. 6—7 Uhr.

In seinen philosophischen Societäten wird Prof. *Peip* abends 6—7 Uhr am Dienstag die Grundlehren der Logik nach Trendelenburgs „Elementa logices Aristoteleae“ entwickeln; am Freitag das XII. Buch der Metaphysik des Aristoteles erklären.







Ueber das Auge und das Mikroskop: Prof. *Listing*, privatissime zu einer bequemen Stunde.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Laboratorium leitet Dr. *Riecke*.

Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und das Gesetz der Erhaltung der Kraft: Dr. *Klein*, Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, 9 Uhr.

Physikalisches Colloquium: Prof. *Listing*, Sonnabend, 10—12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing*, Mittwoch um 11 Uhr. Siehe *Mathematik und Astronomie* S. 358.

Chemie: Prof. *Wöhler*, sechs Stunden, um 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Donnerstag, 12 Uhr.

Organische Chemie, speciell für Mediciner in später zu bestimmenden Stunden, Prof. *von Uslar*.

Organische Chemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 Stunden, 8 Uhr.

Organisch-technische Chemie: Dr. *Tollens*, zwei Stunden, 8 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, vier Stunden, 4 Uhr.

Agriculturchemie (speciell: Chemie des Bodens): Dr. *Wagner*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, in zu bestimmenden Stunden.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Freitag, 12 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Strohmeyer*, privatissime.

Die Vorlesungen über Pharmacie s. unter *Medicin* S. 355.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Dr. *Wagner* leitet die Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) von 8—12 und 2—4 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (mit Ausschl. d. Sonnb.) 8—12 und 2—4 Uhr.

## Historische Wissenschaften.

Geographie und Statistik von Süd-Amerika: Prof. *Wappäus*, vier Stunden, 11 Uhr.

Historiographie und Diplomatie, mit praktischen Uebungen: Prof. *W. Müller*, Dienst., Mittw., Freit., 12 Uhr.

Rundzüge der Urkundenlehre und Uebungen in der Urkundenkritik: Dr. *Steindorff*, drei Stunden, 9 Uhr.

Griechische Geschichte: Prof. *Wachsmuth*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 12 Uhr.

Geschichte unserer Zeit seit 1815: Prof. *Pauli*, fünf Stunden, 9 Uhr.

Allgemeine Geschichte der Gegenwart: Prof. *Droysen*, vier Stunden, 5 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: Prof. *Waitz*, vier Stunden, 8 Uhr.

Deutsche Geschichte: Prof. *Waitz*, fünf Stunden, 4 Uhr.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag, 12 Uhr, öffentlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Droysen*, eine Stunde, öffentlich.

Kirchengeschichte und Geschichte der Juden: s. unter *Religionsgeschichte* S. 351. 352.

## Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Encyclopädie der Staatswissenschaften: Dr. *Dede*, Montag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Volkswirthschaftspolitik: Prof. *Hanssen*, vier Stunden, 11 Uhr.

Finanzwissenschaft: *Derselbe*, vier Stunden, 5 Uhr.

Einführung in die Statistik: Prof. *Wappäus*, Sonnabend, 12 Uhr, öffentlich.

Statistik von Südamerika: s. *Historische Wiss.* S. 361.

Geschichte des Handels und der Industrie: Dr. *Dede*, Mittw., 12 Uhr, unentgeltlich.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: s. *Historische Wiss.* S. 361.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Griepenkerl*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit., 5 Uhr.

Die Ackerbausysteme: Prof. *Griepenkerl*, in zwei passenden Stunden, öffentlich.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre: *Derselbe*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit., 12 Uhr. — Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Drechsler*, vier Stunden, 4 Uhr.

Landwirthschaftliche Fütterungslehre: Prof. *Hennberg*, vier Stunden, Mittwoch und Sonnabend, 11—1 Uhr.

Ueber Pachtverträge: Prof. *Drechsler*, eine Stunde, 4 Uhr.

Landwirthschaftliches Praktikum: Uebungen im Aufbereiten landwirthschaftlicher Berechnungen: Prof. *Drechsler*, in zu bestimmenden Stunden.

Theorie des Ackerbaus: s. *Naturwissenschaften* S. 359.

Agriculturchemie s. unter *Naturwissenschaften* S. 360.

Anatomie der Hausthiere, Pferde- und Rindviehkunde; Hufbeschlag s. *Medicin* S. 357.

Landwirthschaftsrecht s. *Rechtswissenschaft* S. 354.

## Literärgeschichte.

Literargeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur, erster Theil: Prof. *Schweiger*, vier Stunden.

Geschichte der römischen Historiographie: Dr. *Hirschfeld*, Mittwoch und Sonnabend, 12 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung: Assessor *Tümmann*, 10 Uhr.

Geschichte der althochdeutschen Literatur: s. *Deutsche Sprache* S. 364.

Geschichte der deutschen Nationalliteratur von Lessings Zeit bis zur Gegenwart: Prof. *Bohtz*, Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 11 Uhr.

## Alterthumskunde.

Das Theaterwesen der griechischen Tragiker wird erläutern und Sophokles Antigone erklären: Prof. *Wieseler*, vier oder fünf Stunden, 5 Uhr.

Ueber den troischen Sagenkreis: Dr. *Matz*, Mittw. u. Sonnab. 12 Uhr.

Im k. archäologischen Seminar lässt Prof. *Wieseler* endlich einige wichtige Partien der scenischen Archäologie behandeln, Mittw. 5 Uhr, und ausgewählte Kunstwerke erklären, Sonnabend, 12 Uhr. Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen. Grundriss der deutschen Mythologie: Dr. *Wilken*, Mont. u. Donnerst. 6 Uhr.

Die deutsche Heldensage: Assessor *Tittmann*, um 5 Uhr.

## Vergleichende Sprachkunde.

Vergleichende Grammatik der indogermanischen Sprachen: Prof. *Benfey*, Mont., Dienst., Donn. und Freitag, um 3 Uhr.

## Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament siehe unter *Theologie* S. 351—353.

Hebräische Grammatik: s. *Theologie* S. 353.

Abriss der Grammatik der aramäischen Mundart des 7. T. und Erklärung der aramäischen Stücke in demselben: Dr. *Hoffmann*, 2 Stunden, unentgeltlich.

In seiner semitischen Gesellschaft lässt Prof. *de Lagarde* öffentlich, in noch zu bestimmenden Stunden, entweder den Midrasch Bereschith Rabba oder die syrische Uebersetzung der Recognitionen des Clemens oder die arabische Uebersetzung der Evangelien erklären.

Arabisch (Arnold's Chrestomathie): Dr. *Hoffmann*, drei Stunden.

Anfangsgründe des Arabischen: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Unterricht in der äthiopischen Sprache ertheilt Prof. *Ertheau*.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Mittw. 4 Uhr.

Erklärung von Sanskritgedichten: Prof. *Benfey*, Dienst. Donnerst. um 4 Uhr.

## Griechische und lateinische Sprache.

Elemente der griechischen und lateinischen Epigra-

phik: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn., Freit., 9 Uhr.

Griechische Metrik: Prof. *von Leutsch*, vier Stunden, 10 Uhr.

Pindars Epinikien: Prof. *von Leutsch*, vier Stunden, 3 Uhr.

Theokrits Idyllen: Dr. *Matz*, Mont. u. Donn., 4

Platon's Republik: Dr. *Peipers*, vier Stunden, 8

Sophokles Antigone s. *Alterthumskunde* S. 862.

Platons Theaetet und Aristoteles Metaphysik s. *Philosophie* S. 357. 358.

Terentius Adelphoe und Heautontimorumenos: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 2 Uhr.

Cicero de natura deorum Buch I: Dr. *Peipers*, Mittw. 5 Uhr, unentgeltlich.

Die Briefe des jüngern Plinius: Dr. *Hirschfeld*, Donn. 5 Uhr, unentgeltlich.

Im k. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *von Leutsch*, Mittw. von 11—1 Uhr; lässt Aristoteles Rhetorik Buch I erklären Prof. *Sauppe*, Montag und Dienstag, 11 Uhr; Cicero de Republica erklären Prof. *Wachsmuth*, Donnerstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminarium leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *von Leutsch* (Mittw. 9 Uhr), *Sauppe* (Mittw. 2 Uhr) und *Wachsmuth* (Sonnab. 11 Uhr); lässt ausgewählte Fabeln des Bab. Prof. *Sauppe*, Mittw. 2 Uhr, Cicero's Somnium Scipii Prof. *Wachsmuth* erklären, Sonnab. 11 Uhr, alles öffentlich.

## Deutsche Sprache.

Grundzüge der altnordischen Sprache: Prof. *W. Müller*, Mont. u. Donn. 10 Uhr.

Uebersicht der althochdeutschen Literatur und Erklärung der wichtigsten ahd. Sprachdenkmäler: Prof. *Wilken*, Mittwoch und Sonnabend 9 Uhr.

Das Nibelungenlied mit einer Einleitung über die deutsche Heldensage: Prof. *Wilk. Müller*, vier Stunden, 3 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wachsmuth* selbst.

Zur Leitung einer altdutschen Gesellschaft ertheilt Prof. *Wilken*.

Geschichte der deutschen Literatur: s. unter *Literär-  
geschichte*, S. 362. Die deutsche Heldensage: s. *Alter-  
tumskunde* S. 363.

## Neuere Sprachen.

Angelsächsische Grammatik und Erklärung des Beowulf: Prof. *Theod. Müller*, Mont., Dienst. Donn., 9 Uhr.

Uebungen in der englischen Sprache: *Derselbe*, Donn., Freit. und Sonnab., 12 Uhr.

Uebungen in der französischen Sprache: *Derselbe*, Mont., Dienst., Mittw., 12 Uhr.

Eine romanische Societät leitet *Derselbe*, Freit., 9 Uhr, öffentlich.

## Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ausgewählte Denkmäler der christlichen Kunst erklärt Prof. *Unger*.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape* und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der modernen Musik: Prof. *Krölger*, zwei Stunden, 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen, Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

---

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerstag, Freit., Sonnab., Morgens von 8—12 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 3—4 Uhr.

---

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grünelee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

## Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonn-

abend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen und ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

---

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 48), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

---























die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte; ferner wird, wie üblich,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

durch  $\Delta V$  bezeichnet.

Die Continuitäts-Bedingungen, welche, wie man voraussetzt, wenigstens eine Fortsetzung  $V$  erfüllt, bestehen also darin, dass  $V$  im ganzen Raume stetig ist,  $\frac{dV}{dx}$ ,  $\frac{dV}{dy}$  und  $\frac{dV}{dz}$  nur bis zur Grenzfläche, sowohl im äusseren als im inneren Raume. (Beweisen will man bekanntlich, dass es auch eine Fortsetzung  $V_1$  giebt, für welche noch ausserdem  $\Delta V_1 = 0$ ).

Dirichlet selbst benutzt das Prinzip bei der Theorie des Potentials zum Beweise desjenigen Satzes, mit dem Gauss seine oben genannte Arbeit krönt (Nr. 36), nach welchem eine Massenvertheilung in einem körperlichen Raume sich durch eine Belegung der Oberfläche mit Masse ersetzen lässt. Die an der Oberfläche gegebene Function ist bei diesem Beweise nicht völlig allgemein; sie ist nämlich gleich dem Werthe, welchen das Potential  $\int \frac{kdt}{r}$  der gegebenen, im körperlichen Raume vertheilten Masse, an der Oberfläche annimmt. Sie kann also wirklich, den Bedingungen gemäss, fortgesetzt werden, nämlich durch dieses Potential selbst.

Um dann nachzuweisen, dass die gesamte Masse zur Belegung verwandt werden kann, muss man die Fortsetzung auch noch für den Fall bilden, dass die für die Oberfläche gegebene



fen ist, wenn die Begrenzung nur den Bedingungen der Nr. 16 bei Gauss genügt.

Sei dazu  $A$  ein gegebener fester Punkt innerhalb  $t$  oder ausserhalb;  $P$  bezeichne die Punkte im Raume,  $P_0$  an der begrenzenden Fläche; es sei  $AP = r$ ,  $AP_0 = r_0$ . Es sei

die Function, welche an der Oberfläche  $\frac{1}{r_0}$

unseren Bedingungen gemäss fortgesetzt werden. Dies hat nur für den inneren resp. äusseren Raum Schwierigkeiten, da für die Punkte  $P$

äusseren resp. inneren Raumes  $\frac{1}{r}$  eine brauch-

bare Fortsetzung ist. Legt man nun um  $A$  als Mittelpunct eine Kugel mit einem beliebigen Radius  $\alpha$ , die aber ganz innerhalb, resp. ganz ausserhalb des Raumes  $t$  liegt, und bezeichnet mit  $U$  im Innern der Kugel die Grösse 1, zwischen der Kugeloberfläche und der Begrenzung von  $t$  aber Null, so wird

$$V = \frac{1}{r} + \frac{(r^2 - \alpha^2)^2}{r \cdot \alpha^{18}} \cdot U$$

eine Fortsetzung in den inneren resp. den äusseren Raum, welche allen Bedingungen der Stetigkeit und Endlichkeit genügt.

Abgesehen von den Fällen, in denen mehrere geschlossene Flächen auftreten, und die ich durch die gleichen Prinzipien erledigen kann, hat Dirichlet auch in den Anwendungen auf Electrostatik nur solche Functionen wie die hier vorgegebenen von der Oberfläche in's Innere setzen. Die Richtigkeit der ersten Annahme in den bei ihm vorkommenden Fällen ist hier nachgewiesen.



einige Fortsetzungen in den inneren Raum giebt — Aehnliches gilt für den äusseren Raum — hier wird der Kürze halber nur der innere betrachtet — welche

$$\int \left( \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right) dt$$

zu einem Minimum machen. Hieraus ergibt sich dann, wenigstens eine von diesen Fortsetzungen,  $V_1$ , müsse so beschaffen sein, dass für jede Function  $Z$  (m. s. Nr. 2) das Integral

$$\int Z \Delta V_1 dt$$

verschwindet. Hieraus will man schliessen, in dem Raume  $t$  müsse  $\Delta V_1$  im allgemeinen Null sein d. h. mit Ausnahme höchstens von Punkten, Linien und Flächen. Dieser Schluss soll hier geprüft werden.

Er ist nunmehr an den Stellen des Raumes erlaubt, wo die Function  $\Delta V_1$  ihr Zeichen nicht unendlich oft in jedem noch so kleinen Körpertheile ändert oder wenigstens diese Eigenschaft besitzt, nachdem man Punkte, Linien und Flächen ausgeschieden hat. Man kann dann nämlich die Stücke, in welchen  $\Delta V_1$  das gleiche Zeichen behält, beliebig nahe durch Körpern algebraischer Begrenzung  $\varphi = 0$ , z. B. mit Kugeln ausfüllen und für  $Z$  eine Function  $W$  aus Nr. 2 wählen, die in dem Raume in welchem sie nicht verschwindet ihr Zeichen nicht wechselt, so dass das Integral sich allein auf den Theil bezieht, der von einer Fläche  $\varphi = 0$  eingeschlossen ist, und in welchem daher  $W \Delta V_1$  sein Zeichen nicht wechselt, woraus folgt, dass  $\Delta V_1$  im allgemeinen Null ist.



tiale von Massen mit continuirlicher Dichtigkeit zurückführen.

Ist also diese Art von Massen, auf welche die Untersuchungen von Gauss nicht überall anwendbar sein würden, ausgeschlossen, so besitzt  $\Delta V$  in Nr. 1 überall die für  $\Delta V_1$  geforderte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichenwechsel. Unter den Functionen  $W$  in Nr. 2 giebt es offenbar unendlich viele von solcher Beschaffenheit, dass  $V + W$  dieselbe Eigenschaft besitzt. Stellt nun  $V_1$  nicht das Minimum unter allen Fortsetzungen, sondern nur unter denen war, welche die erwähnte Eigenschaft in Bezug auf die Zeichen besitzen, und deren es unendlich viele giebt, so ist für dieses  $V_2$  demnach der Schluss dass  $\Delta V_1$  im allgemeinen Null sei berechtigt.

## Ueber die Ermittlung des Sterblichkeitsgesetzes aus gegebenen Beobachtungen.

Von

K. Hattendorff.

Das Problem, welches ich im Nachfolgenden behandeln will, lässt sich so in Worte fassen.

Es seien vorhanden  $n$  Gruppen von Lebenden, in jeder Gruppe Menschen, die an demselben Tage geboren sind, und zwar:

$L_x$	Lebende vom Alter $x$ ,
$L_{x+1}$	» » » $x+1$ ,
$L_{x+2}$	» » » $x+2$ ,
· · · · ·	· · · · ·
$L_{x+n-1}$	» » » $x+n-1$ .





$m$  das Product 1. 2. 3 . . .  $m$  bezeichnet werden.

Je nachdem man in (1) den Grössen  $w_x, w_{x+1}, w_{x+2}, \dots w_{x+n-1}$  andere und andere Werthe beilegt, wird auch der Werth von  $\omega$  sich ändern. Da man die wahren Werthe von  $w_x, w_{x+1}, \dots w_{x+n-1}$  nicht kennt, so wird man die wahrscheinlichsten suchen und als solche diejenigen ansehen, welche  $\omega$  zu einem Maximum machen.

### §. 1.

Die Bedingung dafür, dass  $\omega$  zu einem Maximum werde, ist

$$(3) \quad 0 =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{dw_{x+k-1}}{w_{x+k-1}(1-w_{x+k-1})} \left\{ T_{x+k-1} - w_{x+k-1} L_{x+k-1} \right\}.$$

Diese Bedingungsgleichung lässt sich nur dann weiter behandeln, wenn man weiss, ob die Grössen  $w_x, w_{x+1}, \dots w_{x+n-1}$  von einander unabhängig sind, oder ob sie noch besondere Bedingungsgleichungen erfüllen müssen. Die Anzahl solcher besonderen Bedingungsgleichungen ist höchstens  $n - 1$ .

Hat man  $n - r$  Bedingungsgleichungen, an welche die variablen Grössen  $w_x, w_{x+1}, \dots w_{x+n-1}$  (und folglich auch ihre wahrschein-



...  $(n - 1)$  Bedingungsgleichungen verbunden voraussetzt. Jede von diesen  $(n - 1)$  Klassen enthält unendlich viele Lösungen, weil die Form der Bedingungsgleichungen unendlich mannichfaltig sein kann.

## §. 2.

Die Gleichung (1) lässt sich durch Einführung neuer Variablen in eine bequemere Form bringen. Es setzt

$$T_{x+k} = v \frac{v^k}{W_k} \text{ für } k = 1, 2, \dots, n.$$

Setzt man die Gleichung (3) über in

$$T_{x+k-1} - w_{x+k-1} L_{x+k-1}$$

$$= v \frac{v^k}{W_k} (T_{x+k-1} - w_{x+k-1} L_{x+k-1}).$$

Man muss aber zu beachten, dass die neue Gleichung (5)  $(n + 1)$  variable Grössen enthält. Die Gleichung (5) ist eine Differentialgleichung, welche  $n$  variable Grössen in unendlicher Nähe des wahrscheinlichsten Werthe Genüge leisten müssen. Demnach die Gleichung (6) das- selbe anzuwenden wie die Gleichung (3) und nicht mehr. Es müssen ausser (6) noch  $(n + 1)$  Bedingungen vorhanden sein. In (5) sind aber  $n$  Bedingungen enthalten. Es fehlt also noch eine Bedingung oder — mit andern Worten — die Grössen  $W_1, W_2, \dots, W_n$ .



Nebenbedingungen für die Grössen  $w_x, w_{x+1}, \dots, w_{x+n-1}$  nicht vorhanden sind.

Uebrigens ist es leicht, die Bedeutung der Gleichung (10) in Worten auszusprechen. Der Satz lautet:

Wenn die Anzahl der anfänglich Lebenden jeder Gruppe multiplicirt wird mit dem wahrscheinlichsten Werthe der Wahrscheinlichkeit zu sterben, so ist die Summe der Producte gleich der beobachteten Gesamtzahl der Sterbefälle aus allen Gruppen.

Das Problem selbst stellt keine Nebenbedingungen. Seine Lösung ist also in (4) enthalten, und die Gleichung (10) ist identisch erfüllt.

Es kann aber vorkommen (und davon soll weiter unten die Rede sein), dass man ausser (4) noch andere Lösungen sucht. Dann hat man von aussen Nebenbedingungen aufzustellen. Dadurch wird etwas Willkürliches in die Lösung hineingetragen. Jede Lösung, die von (4) abweicht, ist mit einer Willkürlichkeit behaftet.

Lässt man aber die Wahl von (höchstens  $n - 1$ ) Nebenbedingungen zu, so ist es um so mehr erlaubt, die Gleichung (10) allgemein gültig hinzustellen, da sie bei der einzigen von Willkür freien Lösung identisch erfüllt ist. Selbst bei der äussersten Zahl von  $(n - 1)$  Nebenbedingungen kann die Gleichung (10) noch aufgestellt werden. Dadurch wird jede der Grössen  $w_x, w_{x+1}, \dots, w_{x+n-1}$  constant, und das gibt eine particuläre Lösung der Gleichung (3).



wird sie z. B. je nach der Grösse des Beobachtungsmaterials gleich fünf Jahren, gleich Jahren, gleich einem Monate nehmen.

Sind die einzelnen Punkte der Curve festgelegt, so folgt daraus noch nichts über den Verlauf der Curve zwischen zwei solchen Punkten. Man kann die Punkte in unendlich vielfältiger Weise durch Curven verbinden. Wie man aber auch die Curve legen mag, immer wird dadurch in den Verlauf der Function (12) zwischen zwei festgelegten Punkten der Curve (11) ein Zusammenhang gebracht, zwar ein Zusammenhang, der aus dem Beobachtungsmaterial nicht herrührt.

Zunächst handelt es sich darum, mit dem Beobachtungsmaterial die Curven selbst festzulegen, d. h. die Frage zu beantworten: wie finden sich

$\lambda(x+1), \lambda(x+2), \dots, \lambda(x+n)$   
wenn  $\lambda(x)$  bekannt ist?

#### §. 4.

Es soll zuerst vorausgesetzt werden, man die Lösung (4) nehmen dürfe. Da gibt sich ohne weiteres

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \lambda(x+1) = \lambda(x) \cdot \left(1 - \frac{T_x}{L_x}\right), \\ \lambda(x+2) = \lambda(x+1) \left(1 - \frac{T_{x+1}}{L_{x+1}}\right), \\ \lambda(x+n) = \lambda(x+n-1) \left(1 - \frac{T_{x+n-1}}{L_{x+n-1}}\right) \end{array} \right.$$







Vergleich zu  $x$ , so kann man die geradlinige  
 Linie an die Stelle der Curve treten lassen.

Dadurch kommt man zu der folgenden parti-  
 kularen Lösung der Aufgabe des §. 2:

$$16) \quad W_k = \text{const.} = 1 - k[W]$$

für  $k = 1, 2, 3, \dots n$ .

In Folge davon wird

$$17) \quad [w_{x+k-1}] = \frac{[W]}{1 - k[W]},$$

und die Gleichung (10) geht über in

$$18) \quad T = [W] \left\{ L_x + \frac{L_{x+2}}{1 - [W]} + \frac{L_{x+2}}{1 - 2[W]} + \dots + \frac{L_{x+n-1}}{1 - (n-1)[W]} \right\},$$

wobei zur Abkürzung

$$T_x + T_{x+1} + T_{x+2} + \dots + T_{x+n-1} = T$$

gesetzt ist.

Hat man die Gleichung (18) gelöst, so er-  
 gibt sich

$$19) \quad \frac{\lambda(x+n)}{\lambda(x)} = 1 - n[W].$$

### §. 7.

Die Gleichung (18) ist von der Form

$$(20) = z \left\{ a_0 + \frac{a_1}{1-z} + \frac{a_2}{1-2z} + \dots + \frac{a_{n-1}}{1-(n-1)z} \right\}$$

Sie lässt sich in die andere Form bringen

$$(21) \quad F(z) = 0,$$

wenn man setzt:

$$P \left\{ -T + z \left( a_0 + \frac{a_1}{1-z} + \dots + \frac{a_{n-1}}{1-(n-1)z} \right) \right\} = F(z)$$

$$P = (1-z)(1-2z) \dots (1-(n-1)z).$$

Die Grössen  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, T$  sind positiv. Beachtet man dieses, so ist es leicht, die Vorzeichen von  $F(z)$  zu bestimmen für

$$z = 0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \infty.$$

Man findet abwechselnde Vorzeichen, und daraus geht hervor, dass zwischen je zwei benachbarten Zahlen der vorigen Reihe je eine Wurzel der Gleichung (18) oder (21) liegt. Für unsern Zweck ist die kleinste Wurzel zu wählen, die zwischen 0 und  $\frac{1}{n-1}$  liegt. Die Gleichung 19 weist darauf hin, dass sie nicht grösser als  $\frac{1}{n}$  sein wird.

Um die Gleichung (20) zu lösen, setze man folgendes System von Gleichungen an







und die Wahrscheinlichkeit der gemachten Hypothese ist:

$$\Omega = \frac{\omega du}{1 - \frac{T}{L}} \int_{-\frac{T}{L}}^{\frac{T}{L}} \omega du$$

d. h.

$$(29) \quad \Omega = \frac{\Pi(L+1)}{\Pi(L)} \cdot \omega du.$$

Hieraus berechnet sich, wenn  $L$  eine sehr grosse Zahl ist, der wahrscheinliche Fehler angenähert:

$$(30) \quad = 0,6745 \sqrt{\frac{T(L-T)}{L^3}}.$$

Der Rechnungsgang ist in Wittstein's mathematischer Statistik §§. 10 und 11 durchgeführt und soll daher hier nicht wiederholt werden.

Aachen, den 13. Juni 1871.

---



























das, was man bisher für Oxybenzoësäure gehalten hat, kein chemisches Individuum sei. Ich unterwarf deshalb die Sulfobenzoësäure und die Oxybenzoësäure einer neuen Untersuchung und fand gleich am Anfang, wie ich früher angegeben habe (Zeitschrift für Chemie 1871, S. 81), dass beide, wie sie gewöhnlich dargestellt werden, Gemische sind.

Ich glaubte hierdurch das Geheimniss der Anomalien gefunden zu haben. Ich stellte eine grössere Menge von vollkommen reinem saurem sulfobenzoësaurem Baryum dar und benutzte zur Darstellung des Kaliumsalzes nur gut ausgebildete Krystalle. Dieses wurde nun mit Kalihydrat geschmolzen und auf diese Weise eine Oxybenzoësäure von unzweifelhafter Reinheit dargestellt. Mit dieser Säure wurde der Versuch von Barth wiederholt.

Inzwischen hat es aber auch Barth für gut gehalten, seine eigene frühere Untersuchung theilweise zu wiederholen und da unsere Resultate in dem wesentlichsten Punkte übereinstimmen, so wäre diese Notiz von mir überflüssig, wenn sich nicht eine kleine Abweichung bei mir gezeigt hätte. Ich habe nämlich auch Protocatechusäure als Product der Einwirkung von Kalihydrat auf Sulfoxybenzoësäure erhalten, und somit bleibt die ursprüngliche Frage vollständig ohne Erledigung, aber zu gleicher Zeit bildet sich eine andere Säure und zwar in etwas grösserer Menge als die Protocatechusäure.

Diese neue Säure ist etwas schwerer löslich in Wasser, als die Protocatechusäure und lässt sich sehr leicht durch Krystallisation davon trennen. Sie bildet grosse, compacte, scheinbar quadratische Krystalle, zuweilen auch quadratische Tafeln. Diese Krystalle enthalten Krystal







diese Säuren nicht so leicht bewirkt werden kann, als in Verbindungen, die weniger substituierende Gruppen enthalten. Es erfordert langes Erhitzen und eine höhere Temperatur, als für die Reaction gewöhnlich angewandt wird. Durch vorsichtiges Arbeiten aber gelingt es, Producte in hinreichender Menge für eine Untersuchung zu erhalten. Ich werde sobald wie möglich die beiden Säuren in grösserer Menge darstellen. Eine davon wird aller Wahrscheinlichkeit nach die bekannte Oxy-salicylsäure sein.

## 7. Ueber die Oxydation der Toluolsulfosäuren.

Von Demselben.

In der Correspondenz aus Göttingen in den Berliner Berichten (IV. Jahrgang S. 680) befindet sich eine Notiz darüber, dass Hübner und Terry beabsichtigen, Toluolsulfosäuren zu oxydiren. Da ich mir die Oxydation wenigstens der Paratoluolsulfosäure vorbehalten habe (Zeitschrift für Chemie 1871, S. 199) und schon einige Zeit damit beschäftigt bin, so erlaube ich mir meine Resultate hier kurz anzugeben, obwohl ich nicht die Absicht hatte, etwas darüber zu publiciren, bis die Untersuchung zum Abschluss gebracht werden konnte.

Da die rohe Toluolsulfosäure aus Ortho- und Para-Säure besteht, so unterwarf ich gleich das Gemisch der beiden Kaliumsalze der Einwirkung von saurem chromsaurem Kalium und Schwefelsäure in bestimmten Verhältnissen, in der Hoffnung, dass die Ortho-Säure vollständig verbrennen würde (Fittig, Zeitschr. für Chemie 1871, S. 179). Die Oxydation, einmal eingeleitet durch gelindes Erwärmen auf dem Wasserbade,













Unabhängigkeit von der Frage nach der Parallelen- theorie dargethan wird. Nun kann man nach dem Vorgange von Cayley, eine allgemeine projectivische Massbestimmung construiren, welche sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als sogenannte Fundamentalfäche bezieht. Diese projectivische Massbestimmung ergibt, je nach der Art der dabei benutzten Fläche zweiten Grades, ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelen- theorien. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sondern sie deckt geradezu deren inneres Wesen auf. —

## I. Die verschiedenen Parallelen- theorien.

Das elfte Axiom des Euklid ist, wie bekannt, mit dem Satze gleichbedeutend, dass die Summe der Winkel im Dreiecke gleich zwei Rechten sei. Nun gelang es Legendre zu beweisen<sup>1)</sup> dass die Winkelsumme im Dreiecke nicht grösser sein kann, als zwei Rechte; er zeigte ferner dass, wenn in einem Dreiecke die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, dass dann ein Gleiches bei jedem Dreiecke der Fall ist. Aber er vermochte nicht zu zeigen, dass die Winkelsumme nicht möglicherweise kleiner ist, als zwei Rechte.

Eine ähnliche Ueberlegung scheint den Ausgangspunkt von Gauss' Untersuchungen über diesen Gegenstand gebildet zu haben. Gauss

1) Dieser Beweis, so wie der sich auf den nämlichen Gegenstand beziehende Beweis von Lobatschewsky setzt die unendliche Länge der Geraden voraus. Lässt man diese Annahme fallen (vgl. den weiteren Text), so fallen auch die Beweise, wie man daraus deutlich übersehen mag, dass dieselben sonst in gleicher Weise für die Geometrie auf der Kugel gelten müssten.



































Ist nun  $o$  ein zweiter Punkt von  $F$  und  $Z_0$  die Conjugirte von  $Z_o$ , so ist

$$w(m/o) = \frac{Z_m - Z_o}{Z_m - Z'_o}$$

eine Function von  $z_m$ , die innerhalb  $F$  nur im Punkte  $o$ , und dort zur ersten Ordnung  $= 0$ , aber in keinem Punkte  $m$  von  $F$  unstetig wird, letzteres weil einem Punkte von  $F$  stets nur ein Punkt von  $E$ , also niemals der ausserhalb  $E$  liegende Punkt  $Z'_o$  entsprechen kann. Nähert sich dann  $m$  sich einem Punkte  $\mu$  von  $K$ , so nähert sich sein Bild  $M$  auf  $E$  dem entsprechenden Punkte  $M$  auf dem Umfange dieser Fläche, d. h. es wird  $Y = 0$ , mithin im Ausdrucke von  $w$  der Nenner die Conjugirte des Zählers, also  $\text{Mod } w(\mu/o) = 1$ .

Sind daher  $\xi, \eta$  die reellen Bestandtheile von  $\log w$ ,

$$\log w(m/o) = \xi(m/o) + i \cdot \eta(m/o),$$

so hat  $\xi(m/o)$  die in meiner ersten Abhandlung über die stationären Temperaturen (Brioschi's Annalen I. pag. 91 und art. IV) geforderten Eigenschaften und stellt zugleich die einzige Function dar, welche diese Eigenschaften besitzt.

Wird daher wie am angeführten Orte eine Function  $v$  angenommen, welche nebst ihren ersten Derivirten in  $F$  bis an  $K$  hinan einwerthig und stetig ist, und berechnet man nun die Grösse











zu Zwecken werden die folgenden Intervalle  
 et:

$$\infty < X < X_0 - \delta, \quad X_0 - \delta < X < X_0, \\
X_0 < X < X_0 + \varepsilon, \quad X_0 + \varepsilon < X < \infty.$$

an die über diese Intervalle erstreckten In-  
 s der positiven Grösse

$$\frac{d\eta}{2\pi} = \frac{1}{\pi} d \operatorname{arctg} \frac{X - X_0}{Y_0}$$

$a, b, c, d$ ; geeignete Zwischenwerthe von  
 innerhalb derselben durch  $A, B, C, D$  be-  
 net, so folgt  $v_0 = Aa + Bb + Cc + Dd$ .  
 at man aber den arcus stetig und, was am  
 msten ist, zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$  an, so

$$a = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\delta}{Y_0} \right)$$

$$b = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{Y_0}$$

$$c = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{Y_0}$$

$$d = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{Y_0} \right).$$

man nun das positive  $Y_0$  abnehmen lässt,  
 ht nichts im Wege, die willkürlich ange-  
 enen positiven Grössen  $\delta, \varepsilon$  ebenfalls ab-  
 en zu lassen. Richtet man dies aber so

ein, dass  $\frac{\delta}{Y_0}$ ,  $\frac{\varepsilon}{Y_0}$  über alle Grenzen wachsen,  
so wird an der Grenze:

$$a = 0, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, d = 0$$

und

$$B = \psi(X_0 - 0), C = \psi(X_0 + 0).$$

Da ferner nach Voraussetzung  $\psi$  niemals unendlich wird, so gibt es endliche Grenzen, unter denen  $\psi$  bleiben, also wird  $Aa = 0$ ,  $Dd = 0$ .

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \psi = \frac{1}{2} (\psi(X_0 - 0) + \psi(X_0 + 0)),$$

da  $\psi$  selbst, wenn  $\psi$  in  $r$  stetig bleibt, dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werten  $\psi_r^+$ ,  $\psi_r^-$ , welche  $\psi_\mu$  bevor es  $\psi$  erreicht, erlangt, wenn  $\mu$  in der Richtung von  $\psi$  gegen  $r$  oder eines positiven Umlaufes

Die Abhandlung des Herrn Prym erledigt die Frage aus einem allgemeineren Gesichtspunkte, indem die Eintrittsrichtung von  $o$  willkürlich gewählt wird. Ist zunächst  $RO = R$ , der Neigungswinkel von  $R$  gegen die positive  $x$ -Achse  $= \Theta$ , so findet man, wenn  $R$  bei wachsendem  $\Theta$  gegen Null convergirt,

$$\lim_{R \rightarrow 0} R \frac{d\psi}{dR} = 0$$

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} \frac{d\psi}{d\Theta} = \frac{1}{2} (\psi_r^- - \psi_r^+).$$













... bekannten Werthen  $\psi$  aus,  
 ... mte Function  $\phi$  durch Ste-  
 ... zsetzung mittelst der *parti-*  
*differentialgleichung* C.  $\gamma$ . ent-  
 ... zu lassen.

... en Satz I. ist für alle Fälle, wo  $\psi$   
 ... ation über  $K$  fähig ist, die Darstel-  
 ... r wirklich zurückgeführt auf die  
 ... es zuerst erwähnten Abbildungsproblems  
 ... Weise dass, so oft die Lösung des letz-  
 ... eine Fläche  $F$  gefunden ist, die Dar-  
 ... g von  $\phi$  durch die obige Formel wirklich  
 ... ist, und z. B. die Existenz zweiter  
 ... der höhern Derivirten innerhalb  $F$  unmit-  
 ... folgt. Wie der Ausdruck von  $\phi$  zu mo-  
 ... en ist, wenn dieser Function innerhalb  $F$   
 ... Unstetigkeiten vorgeschrieben werden, de-  
 ... e Functionen von  $x + iy$  oder ihre reellen  
 ... andtheile fähig sind, bedarf keiner Ausein-  
 ... zsetzung.

... in der gleichen Weise lässt sich die in  
 ... letzten Nummer<sup>1)</sup> von Herrn Heine be-  
 ... eene Frage, welche Dirichlet durch  
 ... rückführung auf eine Minimumsaufgabe be-  
 ... delte, mittelst der Green'schen Function  
 ... eine wesentlich einfachere Aufgabe zu-  
 ... rückführen, und zwar in der bestimmten Weise,  
 ... dass stets mit der Lösbarkeit der letztern zu-  
 ... gleich die der allgemeinsten Aufgabe dargethan  
 ... st. und die directe Untersuchung dieser, welche  
 ... selbst dem Dirichlet'schen Princip nicht mehr  
 ... zugänglich sein würde, überflüssig wird. Diese  
 ... Reduction, welche für einfachere Voraussetzun-  
 ... gen längst bekannt ist, beruht auf dem folgen-  
 ... den, alle Fälle umfassenden Satze:





















dar, analog dem sphärischen Excess eines Kugeldreiecks.

Für die nächsten Betrachtungen setzen wir beide Bedingungen — Gleichheit der beiden Winkel an der Basis und Parallelismus der Kanten — als erfüllt voraus. In der Ebene des Hauptschnittes  $ABC$  (Fig. 2) an welchem der Winkel  $C = 2\alpha$ , also  $A = B = 90^\circ - \alpha$ , lassen wir vorerst homocentrisches paralleles Licht zur Seite  $AC$  eintreten. Es sei  $\theta$  der Neigungswinkel der einfallenden Strahlen gegen die Basis  $AB$ , positiv wenn der Lichtstrahl  $L'A$  in dem Winkelraum  $CAA'$ , negativ wenn er innerhalb  $A'AC$  liegt, so dass  $2\theta$  die durch das Prisma bewirkte katadioptrische Ablenkung darstellt. Dieselbe Ablenkung würde ein einfacher Planspiegel unter der Incidenz  $90^\circ - \theta$ , sofern  $\theta$  positiv ist, bewirken. Da wir nur Strahlen berücksichtigen, welche nach dem Eintritt ins Prisma zur Basis  $AB$  gelangen, um daselbst sei es partiell oder total reflectirt zu werden, so können unter Umständen die Flanken  $AC$  und  $BC$  nur innerhalb der Grenzen  $AD$  und  $BE$  nutzbar sein und ein Theil  $DEC$  des Prismas als entbehrlich weggeschnitten werden \*). Im gewöhnlichen Falle, wo der nutzbare Theil der Flanken bei  $A$  und  $B$  beginnt, wird dessen Grenze durch denjenigen Strahl  $LD$  bestimmt, welcher nach dem Eintritt bei  $D$  auf das Ende  $B$  der Basis gelangt. Die Grenze  $DE$  variirt aber offenbar mit  $\theta$ ,  $\alpha$  und dem Brechungsverhältniss  $n$  des Prismas.

Wir ziehen  $DP$  und  $CR$  senkrecht zur Basis  $AB$ , sowie  $AQ$  senkrecht zu  $LD$ , und setzen  $AB = a$ ,  $DP = b$ ,  $CR = c$ ,  $AD = d$ ,  $AQ = q$ ,

\*) Das Prisma könnte alsdann zwischen  $D$  und  $E$  sogar mit einspringendem Winkel bis zu  $T'$  ausgeschnitten werden.

















hier die berechneten Werthe von  $\theta'$  (sämm-  
positiv) für die früher gewählten Prismenw-  
C und Indices  $n$  übersichtlich folgen.

*Werthe von  $\theta'$*

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)
30°	70° 11'	73° 28'	77° 15'	81° 33'	86° 22'	93° 3'	105°
40	65 6	67 42	70 25	73 16	76 16	79 29	83 2'
50	61 12	63 22	65 35	67 51	70 11	72 35	75 5
60	57 55	59 48	61 42	63 37	65 34	67 33	69 33
70	55 0	56 40	58 21	60 2	61 43	63 25	66 7
80	52 20	53 49	55 19	56 48	58 18	59 47	61 16
90	49 47	51 8	52 29	53 49	55 8	56 27	57 46
100	47 16	48 30	49 43	50 55	52 6	53 17	54 27
110	44 45	45 51	46 57	48 2	49 6	50 9	51 12
120	42 7	43 7	44 6	45 4	46 1	46 58	47 54

Indem also  $\theta^0$  die untere,  $\theta'$  die obere (der Amplitude des Richtungswinkels darstellende) innere Totalreflexion, stellt  $\theta' - \theta^0$  den Umfang dieser Amplitude dar. Legen wir also den in den Uebersichten  $-\theta^0$  und  $\theta'$  gegebenen Zahlen zusammen, so finden sich für die verschiedenen Formen und Substanzen des Reflexionsprismas die verschiedenen Beträge des Raums, welcher dem Richtungswinkel des gehenden total reflectirten Lichts gestattet wie folgt.

*Umfang  $\theta' - \theta^0$*

C	(1.5)	(1.525)	(1.55)	(1.575)	(1.6)	(1.625)	(1.65)
30°	78° 2'	81° 43'	85° 54'	90° 36'	95° 50'	102° 55'	115° 17'
40	75 58	79 8	82 26	85 52	89 27	93 15	97 23
50	75 32	78 29	81 30	84 35	87 44	90 58	94 18
60	76 30	79 29	82 30	85 34	88 42	91 54	95 8
70	79 31	82 41	86 6	89 38	93 19	97 10	101 16
80	86 57	92 25	100 18	106 48	108 18	109 47	111 16
90	94 47	96 8	97 29	98 49	100 8	101 27	102 46
100	87 16	88 30	89 43	90 55	92 6	93 17	94 27
110	79 45	80 51	81 57	83 2	84 6	85 9	86 12
	72 7	73 7	74 6	75 4	76 1	76 58	77 54













von welchen (4) die lichte Breite der Flanke für solche Richtungswinkel bestimmt, bei welchen  $r$  nicht kleiner als  $2\alpha - 90^\circ$ , (5) die zugehörige lineare Oeffnung, (6) die gleichzeitige Nettobreite des Prismas und (7) das Verhältniss dieser Nettobreite zur vollen Breite  $CR$ .

Im Falle senkrechter Incidenz (bei recht- und spitzwinkligen Prismen), wo  $e = 0$ ,  $r = 0$ ,  $\theta = \alpha$ , wird

$$\begin{aligned} d &= q = a \cdot \sin \alpha \\ b &= a \cdot \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{b}{c} &= 2 \sin \alpha^2 \end{aligned}$$

und im Falle directen (unabgelenkten) Durchganges, wo  $\theta = 0$ ,  $e = \alpha$ ,  $\sin r = \frac{1}{n} \sin \alpha$ :

$$\begin{aligned} d &= a \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos r}\right) \\ b &= q = a \sin \alpha \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos r}\right) \\ \frac{b}{c} &= 2 \sin \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos r}\right) \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke zeigen, wie der Fall  $e=0$  auf den  $e=\alpha$  durch Hinzufügung des Factors  $\left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos r}\right)$  übergeführt wird, obwohl man sich bei dem numerischen Calcul der logarithmischen Bequemlichkeit wegen im letzteren Falle an die generellen Vorschriften (4) . . . (7) halten wird.

Den andern der beiden vorhin unterschiedenen Fälle betreffend, wo nämlich  $\gamma > 90^\circ - \alpha$















































































longitudinal zum primären Anacentrum um  $h + l$ ; zum secundären Anacentrum um  $h$  und zum Bilde kleinster Abweichung um

$$h + \frac{l}{2 + \lambda}$$

wofür in den meisten Fällen mit ausreichender Genauigkeit  $h + \frac{1}{2}l$  gesetzt werden darf. Die obigen Ausdrücke (12), (17), (18), (19) enthalten die Vorschriften zur Berechnung der eben erwähnten Grössen  $h$ ,  $k$ ,  $l$  aus den gegebenen  $a$ ,  $\alpha$ ,  $n$  und  $\theta$ . Der in irgend einer Form festgelegte Platz des gegebenen Objects wird erforderlich, sobald auf die kleine Grösse  $\lambda$ , welche im Fall eines virtuellen Bildes negativ zu nehmen ist, Rücksicht genommen werden soll; und zur Bestimmung der Grösse des kleinsten Abweichungskreises

$$\varphi \frac{l}{2 + \lambda}$$

wofür wiederum  $\frac{1}{2}\varphi l$  gesetzt werden kann, bedarf es noch der in Theilen des Radius ausgedrückten Angularapertur  $\varphi$  des durchgehenden Lichtkegels.

---



unmittelbar aus dem anderen jener beiden Sätze, welcher die Ausdehnung eines Satzes über Punctsysteme auf einer geraden Linie enthält, der sich in folgender Weise aussprechen lässt:

Wenn zwischen zwei Puncten  $x$  und  $u$  einer Geraden ( $x$  und  $u$  kann man etwa als Abstände von einem festen Punct auffassen) eine Relation  $p(xu)=0$  besteht, vermöge deren irgend einem Punct  $u$   $p_1$  Puncte  $x$ , dem Punct  $x$   $p_2$  Puncte  $u$  entsprechen \*); wenn ferner vermöge einer zweiten Beziehung  $q(xu)=0$  dem  $u$   $q_1$  Puncte  $x$ , dem  $x$   $q_2$  Puncte  $u$  entsprechen (Correspondenz  $(q_1 q_2)$ ), so ist im Allgemeinen die Zahl der jenen beiden Beziehungen genügenden Punctepaare, nach einem bekannten Satz der Algebra:

$$A_{p,q} = p_1 q_2 + q_1 p_2.$$

Wir beginnen mit der Ausdehnung dieses Satzes auf Punctsysteme von Curven.

### I.

Wenn an Stelle der Geraden eine Curve  $f$  vom Geschlecht  $p$  tritt, so wird einer Beziehung zwischen 2 Puncten  $x$  und  $u$  der Curve durch eine Gleichung  $p(x_1 x_2 x_3, u_1 u_2 u_3)=0$  zwischen den (homogenen) Coordinaten derselben ausgedrückt. Statt dieser Beziehung sei es gestattet wieder die abgekürzte  $p(xu)=0$  einzuführen.

Einem Punct  $u$  entspricht jetzt eine Curve, welche  $f$  in  $p_1$  Puncten schneiden möge. Ebenso entspricht einem Punct  $x$  eine Curve, für welche  $p_2$  die Zahl der Schnittpuncte sei. Zunächst möge  $p(xu)=0$  durch Zusammenfallen von  $x$  mit  $u$  im Allgemeinen nicht erfüllt werden. Besteht alsdann eine zweite Beziehung  $q(xu)=0$ ,

\*) Herr Chasles bezeichnet eine solche Beziehung kurzweg als Correspondenz  $(p_1 p_2)$ .























$$\begin{aligned}
& 2a^{(M-1)} \cdot (M-3 + a^{(M-1)}) \\
& - 2p(M-4) \cdot 3 - 2M_{1,2} \\
& = 4(M-2)(M-3)(M-4) \\
& + 6p(M^2 - 8M + 18) - 12p^2.
\end{aligned}$$

Die Combination von 2) mit 6) liefert die Berührungspunkte von Doppeltangentialebenen, in deren Verbindungslinie ein weiterer Punkt der Curve liegt:

$$= 4 \cdot a^{(M-1)} \cdot N^{(M-2)} - 2p \cdot 4(M-4).$$

In dieser Zahl sind wiederum  $2M_{1,2}$  uneigentliche Lösungen enthalten. Nach Abzug derselben erhält man:

$$4(M-2)(M-3)(M-4) + 4p(M^2 - 10M + 26) - 8p^2.$$

Darmstadt, im September 1871.

---





































































































































rentialgleichung, indem man eine Kugelfläche, welche eine gegebene Fläche berührt, der Bedingung unterwirft, mit der Curve vier Punkte gemein zu haben. In der obigen Gleichung treten die geometrischen Bedeutungen der einzelnen Terme nicht hervor, es ist daher nicht ohne Interesse die betreffende Differentialgleichung in anderen Formen darzustellen, welche unmittelbar gestatten, die betreffenden Curven mit einigen andern Curven vergleichen zu können.

Die Coordinaten  $x, y, z$  eines Punktes einer Curve auf einer Fläche seien Functionen einer Variablen  $t$ . Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$p' = \frac{dp}{dt}, \quad p'' = \frac{d^2p}{dt^2},$$

wo  $p$  eine Function von  $t$  ist. Das Bogenelement der Curve sei  $ds$ , ferner seien  $s', s''$  die Differentialquotienten von  $s$  nach  $t$ . Die Winkel, welche die Normale im Punkte  $(x, y, z)$  mit den Coordinatenachsen bildet, sind durch  $a, b, c$  bezeichnet.

Man setze nun zur Abkürzung:

$$1) \quad S = - \left( \frac{x'}{s'} \frac{d \cos a}{dt} + \frac{y'}{s'} \frac{d \cos b}{dt} + \frac{z'}{s'} \frac{d \cos c}{dt} \right),$$

$$T = \frac{1}{s'^2} \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'', \end{vmatrix},$$

$$H = \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ x', & y', & z' \\ \frac{d \cos a}{dt}, & \frac{d \cos b}{dt}, & \frac{d \cos c}{dt} \end{vmatrix}.$$



































































































27) Am 6. Juni, Eduard Riecke aus Stuttgart. Diss.: Ueber die magnetische Natur des weichen Eisens.

28) Am 17. Juni, Adolf Schroeder aus Lüneburg. Diss.: Ueber den Valeraldehyd.

29) Am 21. Juni Maximilian Perlbach aus Danzig. Diss.: Die ältere Chronik von Oliva.

30) Am 22. Juni, Richard Douglas Williams aus Baltimore. Diss.: Concerning the nature of the Sulpho- and Sulpho-nitro acids of Bibrombenzol.

31) Am 10. Juni, Isaac Flagg aus Cambridge in America. Diss.: Ueber Schiller's Braut von Messina.

32) Am 30. Juni, Carl Eichler aus Widdungen. Diss.: Uebertragung eines Steinerschen Problems in der Ebene auf den Raum.

33) Friedrich Wagner aus Schlesien.

34) Carl Leisewitz aus Dorf Mark.

---





























**Josef Körösi** vorläufiger Bericht über die Resultate der Pester Volkszählung vom Jahre 1870. (Publicationen des statistischen Bureaus der königl. Freistadt Pest. III.) Pest 1871. 8.

**Magnetische und meteorologische Beobachtungen** auf der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1870. Mit einem Anhang: Astronomische Hülftafeln. Abth. I. Jahrg. 31. Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. V. Hft. III. Basel 1871. 8.

**VI u. VII Jahresbericht** des Vereins für Erdkunde zu Dresden. Dresden 1870. 8.

**Nachtrag** zum VI und VII Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dresden. Ebd. 1870. 8.

**Schriften** des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Bd. XI. Jahrg. 1870–71. Wien 1871. 8.

**Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle** de Genève. T. XXI. Partie 1. Genève. 4.

**Table des Mémoires.** I—XX. Ebd. 4.

**Flora Batava.** Afbeelding en beschrijving van Nederlandsche Gewassen. 216. 217 Aflevering. Leyden. 4.

---



THE UNIVERSITY OF CHICAGO

DEPARTMENT OF CHEMISTRY

LABORATORY OF PHYSICAL CHEMISTRY

CHICAGO, ILLINOIS

1925

REPORT OF THE DIRECTOR OF THE LABORATORY OF PHYSICAL CHEMISTRY

1925

FOR THE YEAR 1925

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
 DEPARTMENT OF CHEMISTRY  
 LABORATORY OF PHYSICAL CHEMISTRY  
 CHICAGO, ILLINOIS  
 1925





















































































**CEB.** (Mionnet Suppl. V, p. 446, n. 1046). Die Lücke zwischen **ENI** und dem Eigennamen dürfte demnach das Wort **IEPEIAC** enthalten haben, aber anscheinend nicht vollständig ausgeschrieben.

Friedrich Wieseler.

---























nach Briefen und Schriften aus Petersburg  
und Pompeji 557.

*F. Wieseler*, Ueber die Imhoof-Blumersche Münz-  
sammlung zu Winterthur 635.

*R. v. Willemoes-Suhm*, Vorläufiges über die  
Entwicklung des *Polystoma integerrimum*  
Rud. 181.

— Dr. phil. 604.

*R. D. Williams*, Dr. phil. 620.

*Th. Wolff*, Dr. phil. 619.

*W. Woolls*, Dr. phil. 604.

---

Göttingen,

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.

W. Fr. Käßner!

---











